

Maxime PELLETIER

Mémoire de M2

Semi-invariants de carquois et
saturation pour les coefficients de
Littlewood-Richardson

Encadré par M. Nicolas RESSAYRE

Master 2 Mathématiques Générales 2012-2013

Table des matières

1	Préambule	4
1.1	Généralités sur les carquois et les représentations	4
1.2	Définitions plus spécifiques	5
1.2.1	Anneau des semi-invariants, décomposition en sous-espaces à poids	5
1.2.2	Application d_W^V , suite exacte canonique	7
1.2.3	L'espace $\text{Ext}_Q(V, W)$ et l'application p	7
1.2.4	Justification de la suite exacte canonique	10
1.2.5	Forme bilinéaire d'Euler	10
1.3	Les semi-invariants	11
2	Le résultat principal	16
2.1	Énoncé du théorème et quelques remarques	16
2.2	Démonstration du théorème 1	16
2.2.1	Quelques définitions et lemmes préliminaires	17
2.2.2	Première étape : ajout des sommets x_- et x_+	19
2.2.3	Deuxième étape : suppression des sommets x_i ($i \in \llbracket 1, n \rrbracket$)	29
2.2.4	Troisième étape : cas du carquois Θ_m	34
3	Conséquences du résultat principal	36
3.1	Un corollaire immédiat, puis la saturation de $\Sigma(Q, \beta)$	36
3.2	Application à la saturation des coefficients de Littlewood-Richardson	41

Introduction

Ce mémoire de M2 a consisté en un travail sur un article de recherche assez récent [2]. Cet article, écrit par Harm Derksen et Jerzy Weiman, a été publié en 2000 dans une des principales revues internationales de recherche en mathématiques (le "Journal of the American Mathematical Society"). Il est intitulé "Semi-invariants of quivers and saturation for Littlewood-Richardson coefficients". La partie principale de mon travail sur cet article a été de le comprendre, déjà dans sa globalité, puis ensuite dans les détails. Cette partie a été assez compliquée, en raison du fait que cet article traite de notions avec lesquelles je n'étais pas tellement familier (théorie des invariants, notamment) et est, de plus, rédigé de manière assez succincte par moments. Je remercie d'ailleurs beaucoup Nicolas Ressayre, qui m'a encadré sur ce mémoire, pour son aide. J'ai ensuite rédigé, de manière plus détaillée, ce dont il est question dans l'article.

Dans celui-ci, l'objectif des auteurs est de démontrer ce qu'on appelle la saturation pour les coefficients de Littlewood-Richardson. Il s'agit d'un problème assez important qui apparaît notamment comme étant la dernière étape dans la résolution de la conjecture de Horn. Celle-ci avait pour objectif de résoudre le problème suivant, assez simple au demeurant : étant données deux matrices hermitiennes, peut-on caractériser le spectre de leur somme en fonction des spectres respectifs des matrices de départ ? On rappelle que le spectre d'une matrice hermitienne A de dimension $n \times n$, que l'on notera $\lambda(A)$, est constitué de n valeurs propres, toutes réelles. On peut donc ramener le problème précédent, pour une dimension n fixée, à l'étude du sous-ensemble de $(\mathbb{R}^n)^3$ suivant :

$$\text{Horn}(n) = \{(\lambda(A), \lambda(B), \lambda(C)); A, B, C \in M_n(\mathbb{C}) \text{ hermitiennes telles que } A+B+C = 0\}.$$

La conjecture faite par Horn en 1962 donne une caractérisation de cet ensemble qui permet de l'étudier de manière récursive, puisqu'elle utilise l'appartenance de certains triplets d'éléments de \mathbb{R}^n à $\text{Horn}(r)$, où $r < n$. La démonstration de la conjecture de Horn a nécessité un certain temps et différentes étapes. En 1998, Klyachko prouve une caractérisation similaire de $\text{Horn}(n)$ qui utilise les coefficients de Littlewood-Richardson et ne permet pas l'étude récursive de $\text{Horn}(n)$. Il reste à ce moment-là à faire le lien entre cette caractérisation et celle conjecturée par Horn, ce qui nécessite principalement la saturation pour les coefficients de Littlewood-Richardson : il faut montrer que, si λ , μ et ν sont trois partitions telles qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $c_{N\lambda, N\mu}^{N\nu} \neq 0$, alors $c_{\lambda, \mu}^{\nu} \neq 0$. Ceci a été prouvé en premier par Knutson et Tao en 1999, puis d'une manière tout à fait différente par Derksen et Weiman en 2000 dans l'article que nous allons étudier.

Ce dernier traite de représentations de carquois, sujet rendu populaire par les travaux de Pierre Gabriel au début des années 1970. Un carquois est simplement un graphe composé de sommets, et de flèches (orientées) reliant certains de ces sommets. Une représentation d'un carquois sur un corps \mathbb{K} (pris comme étant algébriquement clos, dans l'article) est formée d'un \mathbb{K} -espace vectoriel pour chaque sommet et d'une application linéaire pour

chaque flèche de ce carquois. Derksen et Weyman s'intéressent seulement aux carquois qui ne possèdent pas de cycle orienté (i.e. de chemin fermé). Afin d'étudier les représentations, possédant une certaine dimension α , d'un carquois Q de cette forme, ils vont fixer l'espace vectoriel sur chaque sommet x comme étant $\mathbb{K}^{\alpha(x)}$. Une représentation de cette dimension est alors une collection d'applications linéaires et l'ensemble de ces représentations est un espace vectoriel, sur lequel agissent le groupe $\mathrm{GL}(Q, \alpha) = \prod_{\{\text{sommet } x\}} \mathrm{GL}(\mathbb{K}^{\alpha(x)})$ et son sous-groupe $\mathrm{SL}(Q, \alpha) = \prod_{\{\text{sommet } x\}} \mathrm{SL}(\mathbb{K}^{\alpha(x)})$. Les orbites pour l'action de $\mathrm{GL}(Q, \alpha)$ sont les classes d'isomorphisme de représentations de Q de dimension α , d'où l'intérêt d'étudier cette action.

L'objectif de Derksen et Weyman est alors d'étudier l'anneau des semi-invariants (i.e. des polynômes sur l'espace des représentations de Q de dimension α , qui sont invariants par l'action de $\mathrm{SL}(Q, \alpha)$) : $\mathrm{SI}(Q, \alpha)$. En effet, l'hypothèse faite sur Q en ce qui concerne l'absence de cycle orienté implique qu'il n'y a pas d'invariants (i.e. d'invariants par l'action de $\mathrm{GL}(Q, \alpha)$). Cet anneau (qui est en fait une algèbre) des semi-invariants va se décomposer en somme directe de sous-espaces à poids $\mathrm{SI}(Q, \alpha)_\sigma$. Les auteurs exposent alors des semi-invariants particuliers, notés c^V (où V est une représentation du carquois Q), qui vont engendrer tous ces sous-espaces à poids et donc l'anneau des semi-invariants. Cela permet de déduire des propriétés sur $\Sigma(Q, \alpha)$, qui est l'ensemble des poids σ tels que le sous-espace à poids $\mathrm{SI}(Q, \alpha)_\sigma$ est non-trivial, et notamment le fait que cet ensemble est saturé. Enfin, en appliquant ces résultats à un carquois possédant une forme particulière, on peut tirer des conséquences sur les $\mathrm{SL}(\mathbb{K}^n)$ -invariants de la $\mathrm{GL}(\mathbb{K}^n)$ -représentation $S_\lambda \mathbb{K}^n \otimes S_\mu \mathbb{K}^n \otimes S_\nu \mathbb{K}^n$, produit tensoriel de trois modules de Schur de \mathbb{K}^n , et ainsi obtenir la saturation pour les coefficients de Littlewood-Richardson.

1 Préambule

1.1 Généralités sur les carquois et les représentations

La première définition à donner est celle de l'outil principal qui va être utilisé : les carquois.

Définition 1. *Un carquois Q est un couple (Q_0, Q_1) , où Q_0 est l'ensemble des sommets et Q_1 celui des flèches du carquois. Toute flèche a possède une extrémité (tête) ha et une origine (queue) ta qui sont toutes deux des sommets, donc des éléments de Q_0 .*

Si nous nous intéressons à ces objets que sont les carquois, c'est pour étudier les représentations de ceux-ci. Pour ce faire, fixons un corps algébriquement clos \mathbb{K} et définissons la notion de représentation d'un carquois :

Définition 2. – *Soit $Q = (Q_0, Q_1)$ un carquois. Une représentation V de Q est constituée de deux familles : une de \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimension finie $(V(x))_{x \in Q_0}$ et une d'applications linéaires $(V(a))_{a \in Q_1}$ avec, pour tout $a \in Q_1$, $V(a) : V(ta) \rightarrow V(ha)$.*

– *Le vecteur dimension d'une représentation V du carquois Q est la fonction $\underline{d}(V) : Q_0 \rightarrow \mathbb{N}$ définie par $\underline{d}(V)(x) = \dim V(x)$ pour tout $x \in Q_0$. C'est donc un élément de l'ensemble des fonctions définies sur Q_0 et à valeurs entières, que l'on notera par la suite Γ (il s'agit d'un \mathbb{Z} -module).*

Munis de cette définition de représentations d'un carquois, nous allons vouloir en étudier de différentes et voir par exemple si l'on peut "passer" d'une représentation à une autre. Cela nécessite la notion suivante : celle de morphisme de représentations.

Définition 3. *Soient V et V' deux représentations d'un même carquois Q . Un morphisme de représentations $\phi : V \rightarrow V'$ est une famille d'applications linéaires $(\phi(x))_{x \in Q_0}$ telle que, pour tout $x \in Q_0$, $\phi(x) : V(x) \rightarrow V'(x)$ et, pour tout $a \in Q_1$, on a :*

$$\phi(ha) \circ V(a) = V'(a) \circ \phi(ta).$$

On notera $\text{Hom}_Q(V, V')$ l'ensemble de ces morphismes. C'est un \mathbb{K} -espace vectoriel.

Remarque : On dit que deux représentations sont isomorphes lorsqu'il existe un morphisme ϕ entre ces deux représentations tel que, pour tout $x \in Q_0$, $\phi(x)$ est un isomorphisme.

Un chemin est une suite finie de flèches telle que l'extrémité de chacune d'entre elles (sauf de la dernière évidemment) correspond à l'origine de la suivante. Voici une notation que l'on utilisera dans la suite : si V est une représentation et p un chemin constitué des flèches a_1, \dots, a_n , on notera $V(p) = V(a_n) \circ \dots \circ V(a_1)$.

1.2 Définitions plus spécifiques

On considère à partir de maintenant un carquois Q , que l'on suppose sans cycle orienté, c'est-à-dire qu'il ne possède pas de chemin qui commence et finit sur le même sommet (hormis le chemin trivial évidemment).

1.2.1 Anneau des semi-invariants, décomposition en sous-espaces à poids

Soit α un vecteur dimension (i.e. une application de Q_0 dans \mathbb{N}). On va fixer une famille $(V(x))_{x \in Q_0}$ (i.e. les espaces vectoriels "sur" chaque sommet) correspondant à ce vecteur dimension. L'ensemble des représentations ayant, pour tout $x \in Q_0$, $V(x)$ comme espace vectoriel sur le sommet x est alors un espace vectoriel que l'on va noter $\text{Rep}(Q, \alpha)$. Plus formellement, posons :

$$\text{Rep}(Q, \alpha) = \bigoplus_{a \in Q_1} \text{Hom}(\mathbb{K}^{\alpha(ta)}, \mathbb{K}^{\alpha(ha)}).$$

C'est un espace vectoriel, appelé espace vectoriel des représentations de Q de dimension α . En effet, un élément de $\text{Rep}(Q, \alpha)$ nous donne une représentation de Q : il suffit de choisir, pour tout $x \in Q_0$, l'espace vectoriel sur le sommet x comme étant $\mathbb{K}^{\alpha(x)}$. Trois groupes :

$$\text{GL}(Q, \alpha) = \prod_{x \in Q_0} \text{GL}(\mathbb{K}^{\alpha(x)}),$$

$$\text{SL}(Q, \alpha) = \prod_{x \in Q_0} \text{SL}(\mathbb{K}^{\alpha(x)})$$

et

$$T = (\mathbb{K}^*)^{Q_0}$$

agissent de manière naturelle sur $\text{Rep}(Q, \alpha)$:

$$\forall (f(x))_{x \in Q_0} \in \text{GL}(Q, \alpha) \text{ (resp. } \text{SL}(Q, \alpha)), \forall (\phi(a))_{a \in Q_1} \in \text{Rep}(Q, \alpha),$$

$$(f(x))_{x \in Q_0} \cdot (\phi(a))_{a \in Q_1} = (f(ha) \circ \phi(a) \circ f(ta)^{-1})_{a \in Q_1}.$$

et

$$\forall (t_x)_{x \in Q_0} \in T, \forall (\phi(a))_{a \in Q_1} \in \text{Rep}(Q, \alpha),$$

$$(t_x)_{x \in Q_0} \cdot (\phi(a))_{a \in Q_1} = (t_{ha} \phi(a) \circ (t_{ta}^{-1} \text{Id}))_{a \in Q_1}.$$

L'action de $\text{GL}(Q, \alpha)$ nous intéresse car on a, par définition, le fait que deux éléments de $\text{Rep}(Q, \alpha)$ donnent deux représentations isomorphes si et seulement s'ils sont dans la même orbite pour cette action.

Remarque : On s'intéresse donc aux actions de $\text{SL}(Q, \alpha)$ et T car leur connaissance permet de comprendre l'action de $\text{GL}(Q, \alpha)$ sur cet espace, puisque, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\text{GL}(\mathbb{K}^n) = \text{SL}(\mathbb{K}^n) \cdot \mathbb{K}^*$.

On va regarder plus précisément dans la suite l'anneau des semi-invariants, appelé ainsi car ses éléments sont dits semi-invariants (i.e. invariants pour l'action de $\mathrm{SL}(Q, \alpha)$) :

$$\mathrm{SI}(Q, \alpha) = \mathbb{K}[\mathrm{Rep}(Q, \alpha)]^{\mathrm{SL}(Q, \alpha)}.$$

Puisque $\mathrm{SL}(Q, \alpha)$ agit sur $\mathrm{Rep}(Q, \alpha)$, ce groupe agit également sur l'anneau de polynômes $\mathbb{K}[\mathrm{Rep}(Q, \alpha)]$. L'anneau des semi-invariants consiste donc en le sous-anneau des éléments invariants par cette action (c'est en fait même une \mathbb{K} -algèbre). Pour la même raison, le groupe T agit sur $\mathbb{K}[\mathrm{Rep}(Q, \alpha)]$.

De plus, ces deux actions commutent, donc $\mathrm{SI}(Q, \alpha) = \mathbb{K}[\mathrm{Rep}(Q, \alpha)]^{\mathrm{SL}(Q, \alpha)}$ se décompose comme somme de sous-espaces à poids :

$$\mathrm{SI}(Q, \alpha) = \bigoplus_{\chi \text{ caractère de } \mathrm{GL}(Q, \alpha)} \mathrm{SI}(Q, \alpha)_{\chi}$$

où, pour tout caractère χ de $\mathrm{GL}(Q, \alpha)$ (i.e. homomorphisme de groupes de $\mathrm{GL}(Q, \alpha)$ dans \mathbb{K}^*),

$$\mathrm{SI}(Q, \alpha)_{\chi} = \{f \in \mathbb{K}[\mathrm{Rep}(Q, \alpha)] \mid \forall g \in \mathrm{GL}(Q, \alpha), g.f = \chi(g)f\}.$$

On peut ici donner un peu plus de précision sur ce que sont les caractères de $\mathrm{GL}(Q, \alpha)$. En effet, on sait que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les caractères de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ sont les applications

$$\begin{aligned} \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) &\longrightarrow \mathbb{K}^* \\ M &\longmapsto (\det M)^a \end{aligned} ,$$

où $a \in \mathbb{Z}$. Et même, plus généralement, si $m, n \in \mathbb{N}^*$, les caractères de $\mathrm{GL}_m(\mathbb{K}) \times \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ sont les applications

$$\begin{aligned} \mathrm{GL}_m(\mathbb{K}) \times \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) &\longrightarrow \mathbb{K}^* \\ (M, N) &\longmapsto (\det M)^a (\det N)^b \end{aligned} ,$$

où $a, b \in \mathbb{Z}$. Ainsi, d'après la définition donnée de $\mathrm{GL}(Q, \alpha)$, les caractères de ce groupe sont les

$$\begin{aligned} \chi_{\sigma} : \mathrm{GL}(Q, \alpha) &\longrightarrow \mathbb{K}^* \\ (f(x))_{x \in Q_0} &\longmapsto \prod_{x \in Q_0} (\det f(x))^{\sigma(e_x)} \end{aligned} ,$$

en notant, pour tout $x \in Q_0$,

$$\begin{aligned} e_x : Q_0 &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ y &\longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } y = x \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

et où, pour tout $x \in Q_0$, $\sigma(e_x) \in \mathbb{Z}$. Comme $(e_x)_{x \in Q_0}$ est une base du \mathbb{Z} -module Γ , cela définit ainsi un (unique) élément $\sigma \in \Gamma^*$. On pourra donc identifier l'ensemble des caractères de $\mathrm{GL}(Q, \alpha)$ avec Γ^* via l'isomorphisme

$$\begin{aligned} \Gamma^* &\longrightarrow \{\text{caractères de } \mathrm{GL}(Q, \alpha)\} \\ \sigma &\longmapsto \chi_{\sigma} \end{aligned} .$$

1.2.2 Application d_W^V , suite exacte canonique

Soient V et W deux représentations de Q . On définit l'application linéaire suivante :

$$d_W^V : \begin{array}{ccc} \bigoplus_{x \in Q_0} \text{Hom}(V(x), W(x)) & \longrightarrow & \bigoplus_{a \in Q_1} \text{Hom}(V(ta), W(ha)) \\ (f(x))_{x \in Q_0} & \longmapsto & (f(ha) \circ V(a) - W(a) \circ f(ta))_{a \in Q_1} \end{array} .$$

Cette application sera très importante pour la suite, notamment de par son déterminant (lorsque l'on pourra le définir), qui nous donnera les semi-invariants. On obtient pour l'instant la suite exacte suivante, dite "canonique" :

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_Q(V, W) \xrightarrow{i} \bigoplus_{x \in Q_0} \text{Hom}(V(x), W(x)) \xrightarrow{d_W^V} \bigoplus_{a \in Q_1} \text{Hom}(V(ta), W(ha)) \xrightarrow{p} \text{Ext}_Q(V, W) \longrightarrow 0,$$

où l'application i est l'injection canonique de $\text{Hom}_Q(V, W)$ dans $\bigoplus_{x \in Q_0} \text{Hom}(V(x), W(x))$, le premier de ces espaces étant inclus dans le deuxième (un élément de $\text{Hom}_Q(V, W)$ est bien une famille d'applications linéaires $\phi(x) : V(x) \longrightarrow W(x)$, pour tout $x \in Q_0$).

1.2.3 L'espace $\text{Ext}_Q(V, W)$ et l'application p

Nous allons construire un espace vectoriel $\text{Ext}_Q(V, W)$, dont les points correspondent bijectivement aux classes d'isomorphisme de triplets (F, j, q) , où F est une représentation de Q et j et q deux morphismes de représentations tels que l'on a la suite exacte suivante :

$$0 \longrightarrow W \xrightarrow{j} F \xrightarrow{q} V \longrightarrow 0.$$

Un point particulier, l'élément neutre, de cet espace vectoriel est donné par la représentation somme directe de W et V , notée $W \oplus V$:

Si l'on fixe une base de chacun des \mathbb{K} -espaces vectoriels $V(x)$ et $W(x)$ (pour $x \in Q_0$), la donnée des $V(a)$ et $W(a)$ (pour $a \in Q_1$) équivaut alors à la donnée de leur matrice. On construit ainsi $W \oplus V$ de la manière suivante : pour tout sommet $x \in Q_0$, on prend l'espace vectoriel $(W \oplus V)(x)$ comme étant $W(x) \oplus V(x)$ (ces espaces sont alors munis de bases puisqu'on en avait pris dans les $V(x)$ et $W(x)$) et, pour toute flèche $a \in Q_1$, on définit $(W \oplus V)(a)$ par sa matrice dans les bases considérées :

$$\begin{array}{ccc} & \begin{array}{cc} W(ta) & V(ta) \end{array} & \\ \left(\begin{array}{cc} \text{Mat } W(a) & (0) \\ (0) & \text{Mat } V(a) \end{array} \right) & & \begin{array}{c} W(ha) \\ \\ V(ha) \end{array} \end{array} .$$

Cela revient à poser :

$$\forall a \in Q_1, \forall w \in W(ta), v \in V(ta), (W \oplus V)(a)(w + v) = W(a)(w) + V(a)(v).$$

Les morphismes de représentations qui donnent un triplet élément de $\text{Ext}_Q(V, W)$ sont $j_0 = (j_0(x))_{x \in Q_0}$ et $q_0 = (q_0(x))_{x \in Q_0}$ avec, pour tout $x \in Q_0$,

$$j_0(x) : \begin{array}{ccc} W(x) & \longrightarrow & W(x) \oplus V(x) \\ w & \longmapsto & w \end{array},$$

et

$$q_0(x) : \begin{array}{ccc} W(x) \oplus V(x) & \longrightarrow & V(x) \\ w + v & \longmapsto & v \end{array}.$$

Plus généralement, soit (F, j, q) triplet donnant un élément de $\text{Ext}_Q(V, W)$. Alors, d'après la suite exacte vérifiée par F , on a, pour tout $x \in Q_0$, $F(x) \simeq W(x) \oplus V(x)$ (en effet : l'espace vectoriel $W(x)$ s'injecte dans $F(x)$ et le quotient $F(x)/W(x)$ est isomorphe à $V(x)$). Munissons à nouveau tous ces espaces $V(x)$ et $W(x)$ de bases, ce qui nous donne une base (en concaténant celles-ci) dans chaque $F(x)$. Les applications $F(a)$ (pour $a \in Q_1$) sont alors entièrement déterminées par leurs matrices dans ces bases. Donnons la forme de ces matrices : soit $a \in Q_1$. De par la suite exacte précédente, la matrice de $F(a)$ est de la forme

$$\begin{array}{ccc} & W(ta) & V(ta) \\ \left(\begin{array}{cc} \text{Mat } W(a) & (\star) \\ (0) & \text{Mat } V(a) \end{array} \right) & & \begin{array}{c} W(ha) \\ \\ V(ha) \end{array} \end{array}.$$

La première colonne se déduit entièrement du fait que j est un morphisme de représentations (et de la définition, donnée précédemment, d'un tel morphisme), alors que le bloc en bas à droite provient du fait que q en est un. Le (\star) situé en haut à droite signifie qu'il n'y a par contre aucune contrainte pour ce bloc : tout choix fait pour celui-ci (pour ceux-ci en fait, puisqu'il y en a un par flèche) nous donne un élément (F, j, q) de $\text{Ext}_Q(V, W)$. Par exemple, le choix de blocs (0) en haut à droite de chaque matrice nous donne $F = W \oplus V$.

A isomorphisme près, tout triplet (F, j, q) tel qu'on ait cette suite exacte est donc de la forme $((\overbrace{(W(x) \oplus V(x))_{x \in Q_0}}^{=F_1}, (F_1(a))_{a \in Q_1}), j_0, q_0)$ où, pour tout $a \in Q_1$, $F(a) \in \text{Hom}(W(ta) \oplus V(ta), W(ha) \oplus V(ha))$ est de la forme précédente.

Réciproquement, soient deux tels éléments

$$\left(\overbrace{((W(x) \oplus V(x))_{x \in Q_0}, (F_1(a))_{a \in Q_1})}^{=F_1}, j_0, q_0 \right)$$

et

$$\left(\overbrace{((W(x) \oplus V(x))_{x \in Q_0}, (F_2(a))_{a \in Q_1})}^{=F_2}, j_0, q_0 \right)$$

(pour tout $a \in Q_1$, $F_1(a)$ et $F_2(a)$ sont donc de la forme annoncée, et on note respectivement $f_1(a)$ et $f_2(a)$ les applications linéaires dont les matrices constituent les blocs en haut à droite des matrices de $F_1(a)$ et $F_2(a)$). On veut comprendre à quelles conditions on a un isomorphisme entre les deux, c'est-à-dire quand il existe $\phi : F_1 \rightarrow F_2$, isomorphisme de représentations, tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} & & & F_1 & & & \\ & & j_0 \nearrow & \downarrow \phi & \searrow q_0 & & \\ 0 & \longrightarrow & W & & V & \longrightarrow & 0 \\ & & j_0 \searrow & \downarrow \phi & \nearrow q_0 & & \\ & & & F_2 & & & \end{array}$$

Du fait des définitions de j_0 , q_0 et des espaces vectoriels $F_1(x)$ et $F_2(x)$ (pour $x \in Q_0$), les morphismes de représentations ϕ qui rendent ce diagramme commutatif sont les $(\phi(x))_{x \in Q_0} \in \bigoplus_{x \in Q_0} \text{Hom}(W(x) \oplus V(x))$ pour lesquels la matrice de chaque $\phi(x)$ (dans une base adaptée à la décomposition en somme directe $W(x) \oplus V(x)$) est de la forme :

$$\begin{pmatrix} & W(x) & & V(x) \\ \begin{pmatrix} I_{\dim W(x)} & \text{Mat } \varphi(x) \\ (0) & I_{\dim V(x)} \end{pmatrix} & & & \end{pmatrix} \begin{matrix} W(x) \\ \\ V(x) \end{matrix},$$

où $\varphi(x) \in \text{Hom}(V(x), W(x))$.

De plus, un tel ϕ est un isomorphisme entre les représentations F_1 et F_2 si et seulement si :

$$\forall a \in Q_1, \phi(ha) \circ F_1(a) = F_2(a) \circ \phi(ta),$$

c'est-à-dire si et seulement si

$$\forall a \in Q_1, \begin{pmatrix} \text{Mat } W(a) & \text{Mat}(f_1(a) + \varphi(ha) \circ V(a)) \\ (0) & \text{Mat } V(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Mat } W(a) & \text{Mat}(f_2(a) + W(a) \circ \varphi(ta)) \\ (0) & \text{Mat } V(a) \end{pmatrix}$$

donc si et seulement si

$$\forall a \in Q_1, f_2(a) = f_1(a) + \varphi(ha) \circ V(a) - W(a) \circ \varphi(ta).$$

Finalement, les éléments de $\text{Ext}_Q(V, W)$ correspondent aux familles $(f(a))_{a \in Q_1}$ (les blocs en haut à droite dans les matrices des $F(a)$) modulo la relation : "il existe $(\varphi(x))_{x \in Q_0}$ telle que, pour tout $a \in Q_1$, on ait l'égalité précédente".

On peut donc définir notre application p de la façon suivante : elle s'applique à une famille $(f(a))_{a \in Q_1} \in \bigoplus_{a \in Q_1} \text{Hom}(V(ta), W(ha))$ et donne l'élément de $\text{Ext}_Q(V, W)$ qui lui correspond (comme on vient de le voir). D'après ce que l'on vient de dire sur les éléments de $\text{Ext}_Q(V, W)$, on voit immédiatement que l'application p est surjective.

1.2.4 Justification de la suite exacte canonique

On cherche le noyau de l'application linéaire p . Une famille $(f(a))_{a \in Q_1}$ est dans $\ker p$ si et seulement si l'élément (F, j_0, q_0) obtenu avec cette famille est isomorphe à l'élément $(W \oplus V, j_0, q_0)$, c'est-à-dire si et seulement si il existe $(\varphi(x))_{x \in Q_0} \in \bigoplus_{x \in Q_0} \text{Hom}(V(x), W(x))$ telle que, pour tout $a \in Q_1$,

$$f(a) = \varphi(ha) \circ V(a) - W(a) \circ \varphi(ta),$$

c'est-à-dire si et seulement si $(f(a))_{a \in Q_1} \in \text{Im } d_W^V$. Cela nous permet de constater que le noyau de p est bien égal à l'image de d_W^V .

La suite exacte que nous avons donnée au départ est alors presque entièrement justifiée : il reste à voir que $\text{Im } i = \ker d_W^V$. C'est très facile à vérifier puisque, i correspondant à une inclusion, on a $\text{Im } i = \text{Hom}_Q(V, W)$. Or :

$$\begin{aligned} (f(x))_{x \in Q_0} \in \ker d_W^V &\iff \forall a \in Q_1, f(ha) \circ V(a) - W(a) \circ f(ta) = 0 \\ &\iff (f(x))_{x \in Q_0} \in \text{Hom}_Q(V, W). \end{aligned}$$

1.2.5 Forme bilinéaire d'Euler

On a annoncé précédemment que c'est en considérant le déterminant de l'application d_W^V que l'on obtiendra les semi-invariants. Pour cela, il nous faut savoir quand on pourra considérer ce déterminant. Introduisons alors la forme bilinéaire d'Euler suivante :

$$\forall \alpha, \beta \in \Gamma, \langle \alpha, \beta \rangle = \sum_{x \in Q_0} \alpha(x)\beta(x) - \sum_{a \in Q_1} \alpha(ta)\beta(ha).$$

On remarque que, en particulier,

$$\begin{aligned}
\langle \underline{d}(V), \underline{d}(W) \rangle &= \sum_{x \in Q_0} \dim V(x) \dim W(x) - \sum_{a \in Q_1} \dim V(ta) \dim W(ha) \\
&= \sum_{x \in Q_0} \dim (\text{Hom}(V(x), W(x))) - \sum_{a \in Q_1} \dim (\text{Hom}(V(ta), W(ha))) \\
&= \dim \left(\bigoplus_{x \in Q_0} \text{Hom}(V(x), W(x)) \right) - \dim \left(\bigoplus_{a \in Q_1} \text{Hom}(V(ta), W(ha)) \right) \\
&= \dim \left(\bigoplus_{x \in Q_0} \text{Hom}(V(x), W(x)) \right) - \dim \text{Ext}_Q(V, W) - \dim(\text{Im } d_W^V) \\
&\quad (\text{par le théorème du rang appliqué à } p) \\
&= \dim(\ker d_W^V) - \dim \text{Ext}_Q(V, W) \quad (\text{théorème du rang appliqué à } d_W^V) \\
&= \dim \text{Hom}_Q(V, W) - \dim \text{Ext}_Q(V, W)
\end{aligned}$$

Remarquons que, par la troisième ligne de cette suite d'égalités, les espaces de départ et d'arrivée de d_W^V ont même dimension si et seulement si $\langle \underline{d}(V), \underline{d}(W) \rangle = 0$, et on peut donc dans ce cas parler du déterminant de cette application.

1.3 Les semi-invariants

On considère, dans cette section, deux vecteurs dimension α et β tels que $\langle \alpha, \beta \rangle = 0$. On a remarqué précédemment que, dans ce cas, pour toutes $V \in \text{Rep}(Q, \alpha)$ et $W \in \text{Rep}(Q, \beta)$, on pouvait définir le déterminant de l'application d_W^V . En effet, le déterminant d'une application linéaire u d'un espace vectoriel E de dimension finie n dans un autre espace F de même dimension se définit de la manière suivante : u nous donne une application linéaire de l'espace des formes n -linéaires alternées sur F dans celui des formes n -linéaires alternées sur E . C'est cette application qu'on appelle le déterminant de u :

$$\begin{aligned}
\det u : \Lambda^n F^* &\longrightarrow \Lambda^n E^* \\
f &\longmapsto (x_1, \dots, x_n) \mapsto f(u(x_1), \dots, u(x_n)) \quad .
\end{aligned}$$

Comme $\Lambda^n E^*$ et $\Lambda^n F^*$ sont deux espaces vectoriels de dimension 1, si l'on choisit une base (i.e. un vecteur non nul) dans chacun d'eux, $\det u$ peut alors être vu comme un scalaire (via sa matrice relativement à ces bases). La valeur de celui-ci dépend par contre du choix desdites bases.

Définition 4. *Le semi-invariant de l'action de $\text{GL}(Q, \alpha) \times \text{GL}(Q, \beta)$ sur $\text{Rep}(Q, \alpha) \times \text{Rep}(Q, \beta)$ est l'application c , définie par :*

$$\begin{aligned}
c : \text{Rep}(Q, \alpha) \times \text{Rep}(Q, \beta) &\longrightarrow \mathbb{K} \\
(V, W) &\longmapsto \det d_W^V \quad .
\end{aligned}$$

Remarque 1 : L'application c définit bien un semi-invariant, car l'action de $\text{GL}(Q, \alpha) \times \text{GL}(Q, \beta)$ sur d_W^V correspond à celle de $\text{GL} \left(\bigoplus_{x \in Q_0} \text{Hom}(V(x), W(x)) \right) \times$

$\mathrm{GL}\left(\bigoplus_{a \in Q_1} \mathrm{Hom}(V(ta), W(ha))\right)$, et car $\det : \mathrm{Hom}(E, F) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\Lambda^n F^*, \Lambda^n E^*)$ est invariant par l'action de $\mathrm{SL}(E) \times \mathrm{SL}(F)$.

Remarque 2 : Puisque la valeur du déterminant considéré dépend du choix de bases, le semi-invariant c est bien défini à multiplication par un scalaire près.

Remarque 3 : D'après la suite exacte donnée dans la partie précédente, on voit que $c(V, W) = 0$ si et seulement si $\mathrm{Hom}_Q(V, W) \neq \{0\}$, ce qui est également équivalent à $\mathrm{Ext}_Q(V, W) \neq \{0\}$.

On fixe à présent $V \in \mathrm{Rep}(Q, \alpha)$. La restriction de c à $\{V\} \times \mathrm{Rep}(Q, \beta)$ définit un élément de $\mathrm{SI}(Q, \beta)$, que l'on notera c^V . De plus, par [6], le poids de c^V est $\langle \alpha, \cdot \rangle : \gamma \longmapsto \langle \alpha, \gamma \rangle$ ($\langle \alpha, \cdot \rangle \in \Gamma^*$).

De manière identique, si $W \in \mathrm{Rep}(Q, \beta)$ est fixée, on définit $c_W \in \mathrm{SI}(Q, \alpha)$ comme la restriction de c à $\mathrm{Rep}(Q, \alpha) \times \{W\}$. Le poids de c_W est cette fois-ci $-\langle \cdot, \beta \rangle$.

Tout comme le semi-invariant c , les semi-invariants (appelés comme ceci puisqu'éléments de ce que l'on a nommé "anneaux des semi-invariants") de la forme c^V et c_W sont définis à multiplication par un scalaire près. Énonçons enfin une dernière remarque avant de nous intéresser à un lemme concernant ces semi-invariants particuliers : si $V, V' \in \mathrm{Rep}(Q, \alpha)$ sont isomorphes, alors, par définition de l'action de $\mathrm{GL}(Q, \alpha)$ sur $\mathrm{Rep}(Q, \alpha)$, cela signifie que V et V' sont dans la même orbite pour cette action, et donc les semi-invariants c^V et $c^{V'}$ sont égaux à un scalaire près (on ne peut de toute façon pas avoir "mieux" : ils ne sont définis qu'à multiplication par un scalaire près). On a évidemment le même résultat pour des semi-invariants de la forme c_W .

Pour conclure ce préambule, qui regroupe de nombreuses définitions de notions utiles par la suite, donnons le lemme suivant, que nous utiliserons notamment lors de la preuve du résultat principal.

Lemme 1. *Soient V, V', V'' et W, W', W'' des représentations du carquois Q telles que $\langle \underline{d}(V), \underline{d}(W) \rangle = 0$ et que l'on a les suites exactes suivantes :*

$$0 \longrightarrow V' \xrightarrow{f_1} V \xrightarrow{g_1} V'' \longrightarrow 0 \quad \text{et} \quad 0 \longrightarrow W' \xrightarrow{f_2} W \xrightarrow{g_2} W'' \longrightarrow 0.$$

Alors :

1. Si $\langle \underline{d}(V'), \underline{d}(W) \rangle < 0$, alors $c^V(W) = 0$;
2. Si $\langle \underline{d}(V'), \underline{d}(W) \rangle = 0$, alors $c^V(W) = c^{V'}(W)c^{V''}(W)$;
3. Si $\langle \underline{d}(V), \underline{d}(W') \rangle > 0$, alors $c^V(W) = 0$;
4. Si $\langle \underline{d}(V), \underline{d}(W') \rangle = 0$, alors $c^V(W) = c^V(W')c^V(W'')$.

Démonstration. La suite exacte concernant V, V' et V'' nous donne une autre suite exacte, qui est la suivante :

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{x \in Q_0} \text{Hom}(V''(x), W(x)) \xrightarrow{\varphi_1} \bigoplus_{x \in Q_0} \text{Hom}(V(x), W(x)) \xrightarrow{\psi_1} \bigoplus_{x \in Q_0} \text{Hom}(V'(x), W(x)) \longrightarrow 0.$$

En effet, l'application φ_1 est obtenue grâce à $g_1 : V \longrightarrow V''$ de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \varphi_1 : \bigoplus_{x \in Q_0} \text{Hom}(V''(x), W(x)) &\longrightarrow \bigoplus_{x \in Q_0} \text{Hom}(V(x), W(x)) \\ (h(x))_{x \in Q_0} &\longmapsto (h(x) \circ g_1(x))_{x \in Q_0} \end{aligned}$$

et ψ_1 est obtenue de même grâce à $f_1 : V' \longrightarrow V$:

$$\begin{aligned} \psi_1 : \bigoplus_{x \in Q_0} \text{Hom}(V(x), W(x)) &\longrightarrow \bigoplus_{x \in Q_0} \text{Hom}(V'(x), W(x)) \\ (h(x))_{x \in Q_0} &\longmapsto (h(x) \circ f_1(x))_{x \in Q_0} \end{aligned} .$$

– φ_1 est injective :

Soit $(h(x))_{x \in Q_0} \in \ker \varphi_1$, c'est-à-dire que, pour tout $x \in Q_0$, on a $h(x) \circ g_1(x) = 0$. Alors, pour tout $x \in Q_0$, pour tout $v \in V(x)$, $h(x)(g_1(x)(v)) = 0$. Par surjectivité de $g_1(x)$, on a donc $h(x) = 0$ pour tout $x \in Q_0$.

– ψ_1 est surjective :

Soit $(l(x))_{x \in Q_0} \in \bigoplus_{x \in Q_0} \text{Hom}(V'(x), W(x))$. Soit $x \in Q_0$. Alors, comme $f_1(x) : V'(x) \longrightarrow V(x)$ est injective, on a $f_1(x)|_{\text{Im } f_1(x)} : V'(x) \longrightarrow \text{Im } f_1(x)$ qui est un isomorphisme d'inverse noté (abusivement) $f_1(x)^{-1}$.

On pose $h(x) : V(x) \longrightarrow W(x)$ telle que :

$$h(x)|_{\text{Im } f_1(x)} = l(x) \circ f_1(x)^{-1}.$$

Ayant fait ceci pour un x quelconque dans Q_0 , on définit ainsi $(h(x))_{x \in Q_0} \in \bigoplus_{x \in Q_0} \text{Hom}(V(x), W(x))$ telle que :

$$\psi_1((h(x))_{x \in Q_0}) = (l(x))_{x \in Q_0}.$$

– $\text{Im } \varphi_1 = \ker \psi_1$:

Soient $(h(x))_{x \in Q_0} \in \ker \psi_1$ et $x \in Q_0$. On a alors $h(x) \circ f_1(x) = 0$, i.e., pour tout $v' \in V'(x)$, $h(x)(f_1(x)(v')) = 0$. Donc, comme on a $\text{Im } f_1(x) = \ker g_1(x)$, cela donne que, pour tout $v \in \ker g_1(x)$, $h(x)(v) = 0$, i.e. $\ker g_1(x) \subset \ker h(x)$. On définit alors $l(x) : V''(x) \longrightarrow W(x)$ de la façon suivante :

$$\forall v'' \in V''(x), \exists v \in V(x) / v'' = g_1(x)(v) \text{ et on pose } l(x)(v'') = h(x)(v).$$

Cette définition ne dépend pas du choix de l'antécédent v par $g_1(x)$ car $\ker g_1(x) \subset \ker h(x)$, et on obtient ainsi $l(x) \in \text{Hom}(V''(x), W(x))$ tel que $h(x) = l(x) \circ g_1(x)$. Ayant fait ceci pour un $x \in Q_0$ quelconque, on a construit $(l(x))_{x \in Q_0} \in \bigoplus_{x \in Q_0} \text{Hom}(V''(x), W(x))$ telle que :

$$(h(x))_{x \in Q_0} = \varphi_1((l(x))_{x \in Q_0}).$$

D'où $\ker \psi_1 \subset \text{Im } \varphi_1$.

Réciproquement, tout fonctionne exactement de la même manière : toutes les étapes suivies pour l'inclusion précédente peuvent être effectuées "dans l'autre sens", car ce sont en fait des équivalences, et pas seulement des implications. On obtient donc que $\text{Im } \varphi_1 = \ker \psi_1$.

La suite exacte annoncée est ainsi justifiée. De même, on a encore une autre suite exacte :

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{a \in Q_1} \text{Hom}(V''(ta), W(ha)) \xrightarrow{\varphi_2} \bigoplus_{a \in Q_1} \text{Hom}(V(ta), W(ha)) \xrightarrow{\psi_2} \bigoplus_{a \in Q_1} \text{Hom}(V'(ta), W(ha)) \longrightarrow 0.$$

De plus, les applications $d_W^{V''}$, d_W^V et $d_W^{V'}$ vont nous permettre de relier ces deux suites exactes. On a en effet le diagramme commutatif suivant avec les deux colonnes qui sont des suites exactes :

$$\begin{array}{ccc} 0 & & 0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bigoplus_{x \in Q_0} \text{Hom}(V''(x), W(x)) & \xrightarrow{d_W^{V''}} & \bigoplus_{a \in Q_1} \text{Hom}(V''(ta), W(ha)) \\ \downarrow \varphi_1 & & \downarrow \varphi_2 \\ \bigoplus_{x \in Q_0} \text{Hom}(V(x), W(x)) & \xrightarrow{d_W^V} & \bigoplus_{a \in Q_1} \text{Hom}(V(ta), W(ha)) \\ \downarrow \psi_1 & & \downarrow \psi_2 \\ \bigoplus_{x \in Q_0} \text{Hom}(V'(x), W(x)) & \xrightarrow{d_W^{V'}} & \bigoplus_{a \in Q_1} \text{Hom}(V'(ta), W(ha)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 & & 0 \end{array}$$

Le fait que celui-ci soit commutatif provient directement du fait que f_1 et g_1 sont des morphismes de représentations :

Soit par exemple $(h(x))_{x \in Q_0} \in \bigoplus_{x \in Q_0} \text{Hom}(V(x), W(x))$. Alors,

$$\begin{aligned} \psi_2 \circ d_W^V((h(x))_{x \in Q_0}) &= \psi_2((h(ha) \circ V(a) - W(a) \circ h(ta))_{a \in Q_1}) \\ &= (h(ha) \circ V(a) \circ f_1(ta) - W(a) \circ h(ta) \circ f_1(ta))_{a \in Q_1} \\ &= (h(ha) \circ f_1(ha) \circ V'(a) - W(a) \circ h(ta) \circ f_1(ta))_{a \in Q_1} \\ &= d_W^{V'}((h(x) \circ f_1(x))_{x \in Q_0}) \\ &= d_W^{V'} \circ \psi_1((h(x))_{x \in Q_0}). \end{aligned}$$

De même, $\varphi_2 \circ d_W^{V''} = d_W^V \circ \varphi_1$.

Supposons que $\langle \underline{d}(V'), \underline{d}(W) \rangle = 0$. Les deux suites exactes qui forment les colonnes du diagramme précédent nous permettent d'obtenir que :

$$\bigoplus_{x \in Q_0} \text{Hom}(V(x), W(x)) \simeq \bigoplus_{x \in Q_0} \text{Hom}(V''(x), W(x)) \oplus \bigoplus_{x \in Q_0} \text{Hom}(V'(x), W(x))$$

et

$$\bigoplus_{a \in Q_1} \text{Hom}(V(ta), W(ha)) \simeq \bigoplus_{a \in Q_1} \text{Hom}(V''(ta), W(ha)) \oplus \bigoplus_{a \in Q_1} \text{Hom}(V'(ta), W(ha)).$$

En prenant, dans les deux espaces $\bigoplus_{x \in Q_0} \text{Hom}(V(x), W(x))$ et $\bigoplus_{a \in Q_1} \text{Hom}(V(ta), W(ha))$ des bases adaptées à ces deux décompositions en somme directe, on obtient que la matrice de d_W^V est :

$$\left(\begin{array}{cc} \bigoplus_{x \in Q_0} \text{Hom}(V''(x), W(x)) & \bigoplus_{x \in Q_0} \text{Hom}(V'(x), W(x)) \\ \text{Mat } d_W^{V''} & (\star) \\ (0) & \text{Mat } d_W^{V'} \end{array} \right) \begin{array}{l} \bigoplus_{a \in Q_1} \text{Hom}(V''(ta), W(ha)) \\ \bigoplus_{a \in Q_1} \text{Hom}(V'(ta), W(ha)) \end{array}$$

La première colonne se déduit du fait que $\bigoplus_{x \in Q_0} \text{Hom}(V''(x), W(x))$ s'injecte dans $\bigoplus_{x \in Q_0} \text{Hom}(V(x), W(x))$ et $\bigoplus_{a \in Q_1} \text{Hom}(V''(ta), W(ha))$ s'injecte dans $\bigoplus_{a \in Q_1} \text{Hom}(V(ta), W(ha))$ respectivement par φ_1 et φ_2 et que l'on a

$$d_W^V \circ \varphi_1 = \varphi_2 \circ d_W^{V''}.$$

Le bloc en bas à droite s'obtient par la relation :

$$\psi_2 \circ d_W^V = d_W^{V'} \circ \psi_1.$$

La matrice de d_W^V est carrée car $\langle \underline{d}(V), \underline{d}(W) \rangle = 0$ et, comme $\langle \underline{d}(V'), \underline{d}(W) \rangle = 0$, celle de $d_W^{V'}$ l'est également. On peut donc calculer le déterminant de d_W^V par blocs : cela nous donne que

$$c^V(W) = c^{V'}(W)c^{V''}(W).$$

Ainsi, le point 2 est démontré.

Supposons à présent que $\langle \underline{d}(V'), \underline{d}(W) \rangle < 0$. Alors, comme

$$\langle \underline{d}(V'), \underline{d}(W) \rangle = \dim\left(\bigoplus_{x \in Q_0} \text{Hom}(V'(x), W(x))\right) - \dim\left(\bigoplus_{a \in Q_1} \text{Hom}(V'(ta), W(ha))\right),$$

l'application $d_W^{V'}$ n'est pas surjective (l'espace d'arrivée est de dimension strictement plus grande que l'espace de départ), et donc d_W^V n'est pas surjective non plus, car

$$\psi_2 \circ d_W^V = d_W^{V'} \circ \psi_1$$

et ψ_1 et ψ_2 sont surjectives. Ainsi, le déterminant de d_W^V est nul, c'est-à-dire

$$c^V(W) = 0.$$

Ce qui démontre le point 1.

Les points 3 et 4 se prouvent exactement de la même façon, en échangeant les rôles de V, V', V'' et W, W', W'' . \square

2 Le résultat principal

2.1 Enoncé du théorème et quelques remarques

On a introduit, dans le préambule, des semi-invariants particuliers de la forme c^V (ou c_W). Ce que l'on va voir à présent, c'est que ceux-ci suffisent à engendrer, comme espace vectoriel, l'anneau des semi-invariants. C'est l'objet du théorème suivant.

Théorème 1. *Soient Q un carquois sans cycle orienté et β un vecteur dimension de ce carquois. Alors, l'anneau $\text{SI}(Q, \beta)$ des semi-invariants est engendré comme \mathbb{K} -espace vectoriel par les semi-invariants de la forme c^V , où V est telle que $\langle \underline{d}(V), \beta \rangle = 0$.*

Remarque 1 : Le même résultat est vrai pour les semi-invariants de la forme c_W : si α est un vecteur dimension, alors $\text{SI}(Q, \alpha)$ est engendré par les semi-invariants de la forme c_W , où $\langle \alpha, \underline{d}(W) \rangle = 0$.

Remarque 2 : Si la représentation V se décompose en somme directe : $V = V_1 \oplus V_2$, alors on a, par le lemme 1, $c^V = 0$ lorsque $\langle \underline{d}(V_1), \beta \rangle \neq 0$ et $c^V = c^{V_1} c^{V_2}$ lorsque $\langle \underline{d}(V_1), \beta \rangle = 0$. Ainsi, $\text{SI}(Q, \beta)$ est engendré, en tant qu'algèbre cette fois-ci, par les éléments de la forme c^V où la représentation V est dite indécomposable (i.e. ne se décompose pas en somme directe non triviale de représentations). On peut donc chercher les générateurs de l'algèbre $\text{SI}(Q, \beta)$ seulement parmi les éléments de poids $\langle \alpha, . \rangle$, où α est tel qu'une représentation générale de dimension α est indécomposable. α est alors appelé une racine de Schur.

Remarque 3 : On verra que l'on va en fait montrer que les éléments de la forme c^V engendrent tous les sous-espaces à poids $\text{SI}(Q, \beta)_\sigma$.

2.2 Démonstration du théorème 1

Dans toute cette partie, on considère, comme dans l'énoncé du théorème, un carquois Q sans cycle orienté et un vecteur dimension β .

2.2.1 Quelques définitions et lemmes préliminaires

Définissons tout d'abord un outil utile dans cette preuve : les représentations projectives indécomposables de Q .

Définition 5. Lorsque x et y sont deux sommets de Q , on note $[x, y]$ le \mathbb{K} -espace vectoriel de base l'ensemble des chemins (dans Q) allant de x à y .

Remarque : Pour tous $x, y \in Q_0$, comme Q est supposé sans cycle orienté, il n'y a qu'un nombre fini de chemins allant de x à y (puisqu'un nombre fini de flèches partent de chaque sommet et que l'on a un nombre fini de sommets). L'espace vectoriel $[x, y]$ est donc de dimension finie sur \mathbb{K} .

Définition 6. Soit $x \in Q_0$. La représentation projective indécomposable de Q correspondant au sommet x , notée P_x , est définie de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall y \in Q_0, P_x(y) = [x, y] \\ \forall a \in Q_1, P_x(a) : \begin{array}{ccc} [x, ta] & \longrightarrow & [x, ha] \\ c & \longmapsto & a \circ c \end{array} \end{array} \right. .$$

(où $a \circ c$ désigne la composition du chemin c avec la flèche -ou le chemin, puisqu'une flèche est un chemin- a).

Remarque : La notion de représentation projective indécomposable est en fait une notion plus générale que ceci. Mais, dans ce cas particulier, celles-ci sont de la forme précédente et, comme nous ne les utiliserons que dans ce cas, il est plus simple de les définir comme cela.

A partir de maintenant, on va noter x_1, \dots, x_n les sommets de Q , de façon à ce que, pour tout flèche $a \in Q_1$ telle que $ta = x_i$ et $ha = x_j$, on ait $i < j$. Une telle numérotation des sommets est possible car Q est sans cycle orienté. Démontrons ceci :

- Montrons qu'il existe, dans Q , un sommet duquel ne part aucune flèche :
Par l'absurde, supposons que, pour chaque sommet, il existe une flèche d'origine celui-ci. Partons d'un sommet $x \in Q_0$ quelconque. Il existe une flèche partant de x et arrivant sur un autre sommet (car le carquois Q est sans cycle orienté) y . De même, il existe une flèche partant de y et arrivant sur un sommet non déjà visité (sinon, on aurait trouvé un cycle orienté dans Q). Ainsi de suite, on construit une suite de sommets de Q deux à deux distincts. Or, il n'y a qu'un nombre fini (noté n) de sommets dans Q . On aboutit donc à une contradiction.
Il existe ainsi un sommet duquel aucune flèche ne part. Notons x_n ce sommet.
- On considère à présent le carquois Q auquel on enlève le sommet x_n , ainsi que toutes les flèches arrivant en x_n . On note Q' ce nouveau carquois. Comme précédemment, il existe un sommet, noté x_{n-1} dans Q' duquel aucune flèche ne part.
- On recommence le mécanisme en enlevant cette fois x_{n-1} à Q' . On construit ainsi, par récurrence (finie), la numérotation x_1, \dots, x_n souhaitée pour les sommets de Q .

Notons, pour tous $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\begin{cases} b_{i,j} = \text{Card}\{a \in Q_1 / ta = x_i \text{ et } ha = x_j\} \\ p_{i,j} = \dim[x_i, x_j] = \text{Card}\{\text{chemins } c \text{ tels que } tc = x_i \text{ et } hc = x_j\} \end{cases} .$$

Donnons alors des relations qui permettent de lier un élément de Γ et l'élément de Γ^* qui lui correspond par la forme bilinéaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$:

Lemme 2. *Pour tout $\alpha \in \Gamma$, si on note $\sigma = \langle \alpha, \cdot \rangle \in \Gamma^*$, on a les relations suivantes, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$:*

$$\begin{cases} \alpha(x_i) = \sigma(e_{x_i}) + \sum_{j=1}^{i-1} p_{j,i} \sigma(e_{x_j}) \\ \sigma(e_{x_i}) = \alpha(x_i) - \sum_{j=1}^{i-1} b_{j,i} \alpha(x_j) \end{cases} .$$

Démonstration. Montrons la deuxième relation : soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Alors,

$$\begin{aligned} \sigma(e_{x_i}) &= \langle \alpha, e_{x_i} \rangle \\ &= \alpha(x_i) - \sum_{\substack{a \in Q_1 / ha = x_i \\ i-1}} \alpha(ta) \\ &= \alpha(x_i) - \sum_{j=1}^{i-1} b_{j,i} \alpha(x_j). \end{aligned}$$

Montrons à présent la deuxième, par récurrence (forte) sur $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

- Pour $i = 1$: on a $\alpha(x_1) = \langle \alpha, e_{x_1} \rangle = \sigma(e_{x_1})$.
- Soit $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. On suppose que la relation donnée est vérifiée pour tout $j \in \llbracket 1, i \rrbracket$. Alors :

$$\begin{aligned} \alpha(x_{i+1}) &= \langle \alpha, e_{x_{i+1}} \rangle + \sum_{j=1}^i b_{j,i+1} \alpha(x_j) \\ &= \sigma(e_{x_{i+1}}) + \sum_{j=1}^i b_{j,i+1} \left(\sigma(e_{x_j}) + \sum_{k=1}^{j-1} p_{k,j} \sigma(e_{x_k}) \right) \\ &= \sigma(e_{x_{i+1}}) + \sum_{j=1}^i b_{j,i+1} \sigma(e_{x_j}) + \sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^{j-1} p_{k,j} b_{j,i+1} \sigma(e_{x_k}). \end{aligned}$$

Or, la première de ces deux dernières sommes (sur j) consiste à sommer les $\sigma(e_{ta})$, pour tous les chemins de longueur 1 (donc flèches) a arrivant en x_{i+1} , tandis que la deuxième consiste à sommer les $\sigma(e_{tc})$ pour tous les chemins c de longueur au moins 2 arrivant en x_{i+1} . Ainsi,

$$\alpha(x_{i+1}) = \sigma(e_{x_{i+1}}) + \sum_{j=1}^i p_{j,i+1} \sigma(e_{x_j}).$$

- Ainsi, par raisonnement par récurrence, la première relation est également prouvée. \square

Remarque : Ces relations nous montrent que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ donne une bijection entre Γ et Γ^* .

Enfin, pour clore cette partie préliminaire à la démonstration, définissons :

- un carquois Θ_m à deux sommets, x_- et x_+ , et m flèches a_1, \dots, a_m , allant toutes de x_- à x_+ .
- un vecteur dimension (pour le carquois Θ_m) $\theta(n)$ défini par $\theta(n)(x_-) = \theta(n)(x_+) = n$.
- un poids τ défini par $\tau(e_{x_-}) = 1$ et $\tau(e_{x_+}) = -1$.

Principe de la démonstration : Il va s'agir de se ramener à l'espace $\text{SI}(\Theta_m, \theta(n))_\tau$ et de montrer que celui-ci est engendré par les semi-invariants de la forme c^V .

2.2.2 Première étape : ajout des sommets x_- et x_+

Remarquons tout d'abord que, comme $\text{SI}(Q, \beta)$ se décompose en somme directe de sous-espaces à poids, il suffit de montrer que chacun de ces sous-espaces $\text{SI}(Q, \beta)_\sigma$ est engendré par les semi-invariants de la forme c^V (ceux qui appartiennent à ce sous-espace). Soit alors $\sigma \in \Gamma^*$ un poids.

Construisons un nouveau carquois, noté \overline{Q} , qui possèdera deux sommets, x_- et x_+ , de plus que le carquois Q de départ. Plus précisément, on pose :

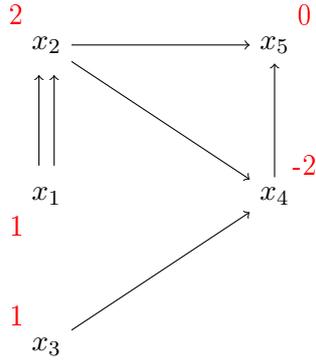
$$\overline{Q}_0 = Q_0 \cup \{x_-, x_+\}$$

et

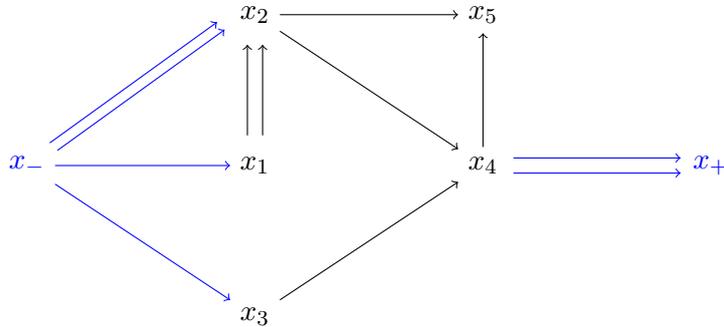
$$\overline{Q}_1 = Q_1 \cup F_- \cup F_+,$$

où F_- est l'ensemble des flèches partant de x_- , réparties de la façon suivante : pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, il y a des flèches allant de x_- à x_i si et seulement si $\sigma(e_{x_i}) > 0$, et il y en a alors $\sigma(e_{x_i})$. De manière analogue, F_+ est l'ensemble des flèches arrivant sur le sommet x_+ : pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, il y a des flèches de x_i à x_+ si et seulement si $\sigma(e_{x_i}) < 0$, et il y en a alors $-\sigma(e_{x_i})$.

Donnons un exemple d'une telle construction : si on part du carquois et du poids suivants



où la valeur du poids en e_{x_i} est écrite en rouge à côté du sommet i correspondant, on obtient alors le carquois



On définit également un poids $\bar{\sigma}$ et un vecteur dimension $\bar{\beta}$ pour ce carquois \bar{Q} par :

$$\begin{cases} \bar{\sigma}(e_{x_-}) = 1 \\ \bar{\sigma}(e_{x_+}) = -1 \\ \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \bar{\sigma}(e_{x_i}) = 0 \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \bar{\beta}(x_-) = \sum_{i / \sigma(e_{x_i}) > 0} \sigma(e_{x_i}) \beta(x_i) \\ \bar{\beta}(x_+) = \sum_{i / \sigma(e_{x_i}) < 0} -\sigma(e_{x_i}) \beta(x_i) \\ \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \bar{\beta}(x_i) = \beta(x_i) \end{cases} .$$

Remarque : $\bar{\beta}(x_-)$ est défini de cette manière dans le but d'avoir une matrice carrée lorsque l'on va considérer l'ensemble des applications linéaires "partant du sommet x_- ". $\bar{\beta}(x_+)$ est défini de la même façon, mais pour les applications linéaires "arrivant sur le sommet x_+ ".

De manière plus explicite, si l'on considère $W \in \text{Rep}(\bar{Q}, \bar{\beta})$ alors, en plaçant les matrices (dans les bases canoniques des espaces considérés, qui sont de la forme \mathbb{K}^r)

des applications linéaires $W(a)$ pour $a \in F_-$ les unes au-dessous des autres (ce qui revient à considérer l'application $(W(a))_{a \in F_-} : \mathbb{K}^{\bar{\beta}(x_-)} \rightarrow \prod_{a \in F_-} \mathbb{K}^{\bar{\beta}(ha)}$), on obtient une matrice carrée. On note $D^-(W)$ le déterminant de cette matrice. De même, si l'on place les matrices des $W(a)$ pour $a \in F_+$ les unes à côté des autres (cela revient à considérer $\sum_{a \in F_+} W(a) : \bigoplus_{a \in F_+} \mathbb{K}^{\bar{\beta}(ta)} \rightarrow \mathbb{K}^{\bar{\beta}(x_+)}$), on a encore une matrice carrée, dont le déterminant est cette fois noté $D^+(W)$.

On a ainsi défini deux éléments de $\text{SI}(\bar{Q}, \bar{\beta}) : D^-$ et D^+ . Ce sont en effet des applications polynomiales sur $\text{Rep}(\bar{Q}, \bar{\beta})$, et des semi-invariants car il s'agit de déterminants.

Lemme 3. *On obtient un isomorphisme :*

$$\phi : \begin{array}{ccc} \text{SI}(Q, \beta)_\sigma & \longrightarrow & \text{SI}(\bar{Q}, \bar{\beta})_{\bar{\sigma}} \\ c & \longmapsto & D^- c D^+ \end{array} .$$

Démonstration. Montrons que cette application est bien définie :

Tout d'abord, D^- et D^+ sont des éléments de $\text{SI}(Q, \beta)$. De plus, un élément c de $\text{SI}(Q, \beta)$ peut-être vu comme appartenant à $\text{SI}(\bar{Q}, \bar{\beta})$: en effet, comme le carquois \bar{Q} muni du vecteur dimension $\bar{\beta}$ "contient" le carquois Q muni du vecteur dimension β , il suffit de considérer que l'image par c d'un élément W de $\text{Rep}(\bar{Q}, \bar{\beta})$ est $c(W|_Q)$ (la notation $W|_Q$ est quelque peu abusive, mais désigne bien ce que l'on pense). Il nous reste à vérifier que, si l'on considère $c \in \text{SI}(Q, \beta)_\sigma$, $D^- c D^+$ est bien de poids $\bar{\sigma}$:

Le caractère de $\text{GL}(\bar{Q}, \bar{\beta})$ qui correspond à $\bar{\sigma}$ est

$$\bar{\chi} : \begin{array}{ccc} \text{GL}(\bar{Q}, \bar{\beta}) & \longmapsto & \mathbb{K}^* \\ (g_-, g_1, \dots, g_n, g_+) & \longmapsto & \det(g_-) \cdot (\det(g_+))^{-1} \end{array} .$$

Soit $g = (g_-, g_1, \dots, g_n, g_+) \in \text{GL}(\bar{Q}, \bar{\beta})$. On a

$$g.(D^- c D^+) = \overbrace{\left(\det(g_-) \prod_{i \in [1, n], a \in F_- / ha=x_i} \det(g_i^{-1}) \cdot D^- \right)}^{\text{partie provenant de l'action sur } D^-} \left((g_1, \dots, g_n).c \right) \\ \times \underbrace{\left(\det(g_+^{-1}) \prod_{i \in [1, n], a \in F_+ / ta=x_i} \det(g_i) \cdot D^+ \right)}_{\text{partie provenant de l'action sur } D^+}$$

d'où

$$g.(D^- c D^+) = \left(\det(g_-) \prod_{i \in [1, n] / \sigma(e_{x_i}) > 0} \det(g_i^{-1})^{\sigma(e_{x_i})} \cdot D^- \right) \left(\prod_{i \in [1, n]} \det(g_i)^{\sigma(e_{x_i})} \cdot c \right) \\ \times \left(\det(g_+^{-1}) \prod_{i \in [1, n] / \sigma(e_{x_i}) < 0} \det(g_i)^{-\sigma(e_{x_i})} \cdot D^+ \right) \\ = \det(g_-) \cdot (\det(g_+))^{-1} \cdot D^- c D^+$$

Ainsi, D^-cD^+ est bien de poids $\bar{\sigma}$. Donc ϕ est bien définie.

De plus, ϕ est injective grâce à l'intégrité de l'anneau $\mathbb{K}[\text{Rep}(\bar{Q}, \bar{\beta})]$. Il reste à montrer qu'elle est surjective.

Soit $\tilde{c} \in \text{SI}(\bar{Q}, \bar{\beta})_{\bar{\sigma}}$. Un élément W de $\text{Rep}(\bar{Q}, \bar{\beta})$ est une famille $(W(a))_{a \in \bar{Q}_1}$ d'applications linéaires. On peut séparer cette famille en trois sous-familles : $W_1 = (W(a))_{a \in \bar{Q}_1 / ta=x_-}$, $W_2 = (W(a))_{a \in Q_1}$, et $W_3 = (W(a))_{a \in \bar{Q}_1 / ha=x_+}$. Ainsi, un élément de $\mathbb{K}[\text{Rep}(\bar{Q}, \bar{\beta})]$ s'applique à un triplet (W_1, W_2, W_3) . Si on note :

- Q^- le carquois (qui est une partie de \bar{Q}) formé du sommet x_- , des flèches de \bar{Q}_1 partant de ce sommet, et des sommets en lesquels arrivent ces flèches,
- Q^+ le carquois analogue pour le sommet x_+ ,

cela revient à dire que $\text{Rep}(\bar{Q}, \bar{\beta}) = \text{Rep}(Q^-, \bar{\beta}|_{Q_0^-}) \oplus \text{Rep}(Q, \beta) \oplus \text{Rep}(Q^+, \bar{\beta}|_{Q_0^+})$.

De plus, en tant qu'espaces vectoriels, $\text{Rep}(Q^-, \bar{\beta}|_{Q_0^-}) \simeq \text{Rep}(\Theta_1, \theta(n_-))$ (en notant $n_- = \bar{\beta}(x_-)$). En effet, cela revient simplement à dire que $\bigoplus_{a \in \bar{Q}_1 / ta=x_-} \text{Hom}(\mathbb{K}^{n_-}, \mathbb{K}^{\bar{\beta}(ha)}) \simeq \text{Hom}(\mathbb{K}^{n_-}, \mathbb{K}^{n_-})$ (car $n_- = \bar{\beta}(x_-) = \sum_{a \in \bar{Q}_1 / ta=x_-} \bar{\beta}(ha)$). De même, $\text{Rep}(Q^+, \bar{\beta}|_{Q_0^+}) \simeq \text{Rep}(\Theta_1, \theta(n_+))$ (en notant $n_+ = \bar{\beta}(x_+)$). Ainsi :

$$\text{Rep}(\bar{Q}, \bar{\beta}) \simeq \text{Rep}(\Theta_1, \theta(n_-)) \oplus \text{Rep}(Q, \beta) \oplus \text{Rep}(\Theta_1, \theta(n_+)).$$

Cela nous donne, au niveau des polynômes (quitte à réordonner les variables de ceux-ci) :

$$\mathbb{K}[\text{Rep}(\bar{Q}, \bar{\beta})] \simeq \mathbb{K}[\text{Rep}(Q, \beta)] \otimes \mathbb{K}[\text{Rep}(\Theta_1, \theta(n_+))] \otimes \mathbb{K}[\text{Rep}(\Theta_1, \theta(n_-))].$$

Considérons à présent l'action de $\text{SL}(\mathbb{K}^{n_-})$, qui est "situé" au-dessus du sommet x_- , sur $\text{Rep}(\Theta_1, \theta(n_-))$. On sait que $\mathbb{K}[\text{Rep}(\Theta_1, \theta(n_-))]^{\text{SL}(\mathbb{K}^{n_-})} = \mathbb{K}[\det]$. Donc, comme le déterminant (qui va ici être D^-) est invariant par l'action de $\text{SL}(Q^-, \bar{\beta}|_{Q_0^-})$ et comme $\text{SL}(\mathbb{K}^{n_-})$ est contenu dans ce dernier groupe, on a $\mathbb{K}[\text{Rep}(Q^-, \bar{\beta}|_{Q_0^-})]^{\text{SL}(Q^-, \bar{\beta}|_{Q_0^-})} = \mathbb{K}[D^-]$. De plus, $\mathbb{K}[\text{Rep}(Q^-, \bar{\beta}|_{Q_0^-})]_{\sigma_-}^{\text{SL}(Q^-, \bar{\beta}|_{Q_0^-})} = \mathbb{K} \cdot D^-$ car le déterminant est le seul semi-invariant qui est de poids 1 sur x_- . D'où :

$$\mathbb{K}[\text{Rep}(\bar{Q}, \bar{\beta})]_{\sigma_-}^{\text{SL}(Q^-, \bar{\beta}|_{Q_0^-})} \simeq (\mathbb{K}[\text{Rep}(Q, \beta)] \otimes \mathbb{K}[\text{Rep}(\Theta_1, \theta(n_+))]) \cdot D^-.$$

Puis, en regardant l'action de $\text{SL}(Q^+, \bar{\beta}|_{Q_0^+})$ et en effectuant le même raisonnement,

$$\mathbb{K}[\text{Rep}(\bar{Q}, \bar{\beta})]_{\sigma_- + \sigma_+}^{\text{SL}(Q^-, \bar{\beta}|_{Q_0^-}) \times \text{SL}(Q^+, \bar{\beta}|_{Q_0^+})} \simeq \mathbb{K}[\text{Rep}(Q, \beta)] \cdot D^+ \cdot D^-.$$

Et donc, finalement :

$$\text{SI}(\bar{Q}, \bar{\beta})_{\bar{\sigma}} \simeq \mathbb{K}[\text{Rep}(Q, \beta)]_{\sigma}^{\text{SL}(Q, \beta)} \cdot D^+ \cdot D^-.$$

Ce qui nous donne bien l'existence de $c \in \text{SI}(Q, \beta)_{\sigma}$ tel que $\tilde{c} = D^-cD^+$. \square

Notons à présent $\bar{\alpha}$ l'élément de Γ tel que $\bar{\sigma} = \langle \bar{\alpha}, \cdot \rangle$. Vérifions que $\bar{\alpha}$ est un vecteur dimension du carquois \bar{Q} :

Par le lemme 2,

$$\bar{\alpha}(x_-) = \bar{\sigma}(e_{x_-}) = 1 \geq 0,$$

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \bar{\alpha}(x_i) = \text{nombre de chemins de } x_- \text{ à } x_i \geq 0,$$

et

$$\bar{\alpha}(x_+) = -1 + \text{nombre de chemins de } x_- \text{ à } x_+.$$

Ainsi, $\bar{\alpha}(x_+) \geq 0$ si et seulement s'il existe un chemin de x_- à x_+ . Mais, si le poids σ choisi au départ est tel qu'il n'existe pas de tel chemin, on obtiendra après notre deuxième étape un carquois (noté Θ_0) formé de deux sommets et aucune flèche entre les deux. L'espace Rep sur ce carquois est alors nul et il n'y a donc rien à étudier. Par conséquent, ce cas ne nous intéresse pas et on suppose donc qu'il existe un chemin de x_- à x_+ . $\bar{\alpha}$ est alors un vecteur dimension du carquois \bar{Q} .

On a la proposition importante suivante :

Proposition 1. *Pour tout $\bar{V} \in \text{Rep}(\bar{Q}, \bar{\alpha})$, il existe α , vecteur dimension de Q , et $V \in \text{Rep}(Q, \alpha)$ tels que le facteur c dans la décomposition $c^{\bar{V}} = D^- c D^+$ (obtenue par l'isomorphisme précédent) est égal à c^V .*

Démonstration. Remarquons tout d'abord que, par le même calcul que dans la preuve du lemme 3, on a, pour tout $g = (g_-, g_1, \dots, g_n, g_+) \in \text{GL}(\bar{Q}, \bar{\beta})$,

$$g.D^- = \det(g_-) \prod_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket / \sigma(e_{x_i}) > 0} \det(g_i)^{-\sigma(e_{x_i})} \cdot D^-$$

et

$$g.D^+ = \det(g_+^{-1}) \prod_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket / \sigma(e_{x_i}) < 0} \det(g_i)^{-\sigma(e_{x_i})} \cdot D^+.$$

Si on note σ_- et $\sigma_+ \in \Gamma^*$ les poids respectifs de D^- et D^+ , on a donc :

$$\begin{cases} \sigma_-(e_{x_-}) = 1 \\ \sigma_-(e_{x_+}) = 0 \\ \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sigma_-(e_{x_i}) = \begin{cases} -\sigma(e_{x_i}) & \text{si } \sigma(e_{x_i}) > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \sigma_+(e_{x_-}) = 0 \\ \sigma_+(e_{x_+}) = -1 \\ \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sigma_+(e_{x_i}) = \begin{cases} -\sigma(e_{x_i}) & \text{si } \sigma(e_{x_i}) < 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$$

Ce qui, par le lemme 2 nous donne que les poids de D^- et D^+ sont respectivement $\langle \gamma_-, \cdot \rangle$ et $\langle \gamma_+, \cdot \rangle$, où :

$$\gamma_-(x_-) = 1, \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \gamma_-(x_i) = \gamma_-(x_+) = 0$$

et

$$\gamma_+(x_-) = 0, \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \gamma_+(x_i) = - \sum_{j \in \llbracket 1, i \rrbracket / \sigma(e_{x_j}) < 0} p_{j,i} \sigma(e_{x_j}),$$

$$\gamma_+(x_+) = -1 + \sum_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket / \sigma(e_{x_i}) < 0} \left(\sum_{j \in \llbracket 1, i \rrbracket / \sigma(e_{x_j}) < 0} p_{j,i} \sigma(e_{x_j}) \sigma(e_{x_i}) \right).$$

De plus, en calculant (à partir des expressions de σ_- et σ_+ plutôt) on trouve facilement que $\langle \gamma_-, \bar{\beta} \rangle = \langle \gamma_+, \bar{\beta} \rangle = 0$.

Soit à présent $\bar{V} \in \text{Rep}(\bar{Q}, \bar{\alpha})$. Par le lemme 3, on sait qu'il existe $c \in \text{SI}(Q, \beta)_\sigma$ tel que $c\bar{V} = D^- c D^+$. L'idée va être de tout d'abord écrire D^- et D^+ sous la forme de semi-invariants $c^{\bar{V}_2}$ et $c^{\bar{V}_3}$, où \bar{V}_2 et \bar{V}_3 sont des sous-représentations de la représentation donnée par \bar{V} . Remarquons que l'on connaît les vecteurs dimension qu'ont nécessairement \bar{V}_2 et \bar{V}_3 dans ce cas. En effet, par ce qui précède, D^- et D^+ ont pour poids respectifs $\langle \gamma_-, \cdot \rangle$ et $\langle \gamma_+, \cdot \rangle$, ce qui implique (d'après la page 12, après la remarque 3) que γ_- et γ_+ sont les vecteurs dimension de \bar{V}_2 et \bar{V}_3 (on a trouvé les expressions de γ_- et γ_+ et on peut donc voir que ce sont bien des vecteurs dimension, puisqu'il existe un sommet x_i de poids $\sigma(e_{x_i}) < 0$. Sinon, il n'y aurait pas de chemin de x_- à x_+ dans \bar{Q} , ce que l'on a écarté). Une fois que l'on aura obtenu \bar{V}_2 et \bar{V}_3 , il s'agira d'utiliser le lemme 1 afin d'avoir la représentation V que l'on cherche.

Construction de \bar{V}_2 : On va confondre à partir de maintenant les éléments des $\text{Rep}(\bar{Q}, \bar{\gamma})$ (où $\bar{\gamma}$ est un vecteur dimension pour le carquois \bar{Q}), qui sont des familles d'applications linéaires, et les représentations de \bar{Q} obtenues à partir de ceux-ci (que l'on a en posant, comme espace vectoriel sur le sommet x , $\mathbb{K}^{\bar{\gamma}(x)}$).

On commence par noter \bar{V}_1 la sous-représentation de \bar{V} obtenue en "enlevant" le sommet x_- . Autrement dit, on pose :

$$\forall x \in \bar{Q}_0, \quad \bar{V}_1(x) = \begin{cases} \{0\} & \text{si } x = x_- \\ \mathbb{K}^{\bar{\alpha}(x)} & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$\forall a \in \bar{Q}_1, \quad \bar{V}_1(a) = \begin{cases} 0 & \text{si } ta = x_- \\ \bar{V}(a) & \text{sinon} \end{cases}.$$

On définit alors la représentation \bar{V}_2 de \bar{Q} par la suite exacte suivante :

$$0 \longrightarrow \bar{V}_1 \longrightarrow \bar{V} \longrightarrow \bar{V}_2 \longrightarrow 0.$$

Voyons que \bar{V}_2 convient alors : au vu des vecteurs dimension de \bar{V} et \bar{V}_1 , son vecteur dimension est :

$$x \longmapsto \begin{cases} \bar{\alpha}(x_-) & \text{si } x = x_- \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Or, on a $\bar{\alpha}(x_-) = \bar{\sigma}(e_{x_-}) = 1$, donc \bar{V}_2 a bien pour vecteur dimension γ_- et donc pour poids $\langle \gamma_-, \cdot \rangle = \sigma_-$. On en déduit que $c^{\bar{V}_2} = D^-$ car D^- est le seul semi-invariant (à multiplication par un scalaire près, ce qui ne pose pas de problème puisque tous nos semi-invariants sont définis à multiplication par un scalaire près) de poids 1 sur le sommet x_- .

Construction de \bar{V}_3 : On va commencer par donner une représentation "abstraite" (au sens de "sans rapport avec \bar{V} ") M de \bar{Q} telle que $c^M = D^+$. On définit M grâce à la suite exacte suivante :

$$0 \longrightarrow P_{x_+} \xrightarrow{i} \bigoplus_{a \in \bar{Q}_1 / ha=x_+} P_{ta} \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

où le morphisme de représentations i est défini comme suit :

$$i = (i(x))_{x \in \bar{Q}_0} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \forall x \in \bar{Q}_0 \setminus \{x_+\}, i(x) = 0 \text{ (car on a } P_{x_+}(x) = \{0\}) \\ i(x_+) : \text{Vect}(e(x_+)) \longrightarrow \bigoplus_{a \in \bar{Q}_1 / ha=x_+} [ta, x_+] \\ k.e(x_+) \longmapsto k.a \end{cases} .$$

Montrons que le vecteur dimension de M est bien γ_+ : comme, pour toute $a \in \bar{Q}_1$ telle que $ha = x_+$, le vecteur dimension de P_{ta} , noté δ_a vérifie (en notant $x_i = ta$) :

$$\begin{cases} \delta_a(x_-) = 0 \text{ (car on ne peut avoir une flèche de } x_- \text{ à } x_i \text{ et une de } x_i \text{ à } x_+) \\ \forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \delta_a(x_j) = \dim[x_i, x_j] = p_{i,j} \\ \delta_a(x_+) = \dim[x_i, x_+] = - \sum_{j \in \llbracket i, n \rrbracket / \sigma(x_j) < 0} p_{i,j} \sigma(x_j) \end{cases} ,$$

on peut dire que le vecteur dimension δ de $\bigoplus_{a \in \bar{Q}_1 / ha=x_+} P_{ta}$ est tel que :

$$\begin{cases} \delta(x_-) = 0 = \gamma_+(x_-) \\ \forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \delta(x_j) = - \sum_{i \in \llbracket 1, j \rrbracket / \sigma(x_i) < 0} \sigma(x_i) p_{i,j} = \gamma_+(x_j) \\ \delta(x_+) = \sum_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket / \sigma(x_i) < 0} \sigma(x_i) \sum_{j \in \llbracket i, n \rrbracket / \sigma(x_j) < 0} p_{i,j} \sigma(x_j) = \gamma_+(x_+) + 1 \end{cases} .$$

Par conséquent, le vecteur dimension de M est bien γ_+ . De plus, on en déduit que le poids du semi-invariant c^M est $\langle \gamma_+, \cdot \rangle = \sigma_+$, ce qui nous permet de conclure, comme précédemment pour $c^{\bar{V}_2} = D^-$, que $c^M = D^+$ car D^+ est le seul semi-invariant de poids -1 sur le sommet x_+ .

Construisons à présent une sous-représentation \bar{V}_3 de \bar{V} isomorphe à M . On considère l'application linéaire

$$\sum_{a \in \bar{Q}_1 / ha=x_+} \bar{V}_1(a) : \bigoplus_{a \in \bar{Q}_1 / ha=x_+} \bar{V}_1(ta) \longrightarrow \bar{V}_1(x_+) .$$

Comme (par le même type de calcul que précédemment) la dimension de l'espace vectoriel $\bigoplus_{a \in \overline{Q}_1 / ha=x_+} \overline{V}_1(ta)$ vaut $-\sum_{j \in [1, n] / \sigma(x_j) < 0} \sigma(x_j) \sum_{i \in [1, j] / \sigma(x_i) < 0} \sigma(x_i) p_{i,j}$, on remarque donc que :

$$\dim \left(\bigoplus_{a \in \overline{Q}_1 / ha=x_+} \overline{V}_1(ta) \right) = \dim(\overline{V}_1(x_+)) + 1.$$

L'application précédente possède donc un noyau de dimension au moins 1. Soit alors $(s_a)_{a \in \overline{Q}_1 / ha=x_+}$ un élément non nul de ce noyau. Cela nous permet de définir un morphisme de représentations

$$\phi = (\phi(x))_{x \in \overline{Q}_0} : \bigoplus_{a \in \overline{Q}_1 / ha=x_+} P_{ta} \longrightarrow \overline{V}_1$$

de la manière suivante : soit $x \in \overline{Q}_0$. S'il existe $a_0 \in \overline{Q}_1$ telle que $ta_0 = x$ et $ha_0 = x_+$ (c'est le cas si et seulement si $\sigma(e_x) < 0$), on pose

$$\begin{aligned} \phi(x) : [ta_0, ta_0] \oplus \bigoplus_{a \in \overline{Q}_1 \setminus \{a_0\} / ha=x_+} [ta, x] &\longrightarrow \overline{V}_1(x) \\ (k.e(ta_0), p) &\longmapsto k.s_{a_0} \end{aligned}$$

Si non, on pose $\phi(x) = 0$. On obtient bien un morphisme de représentations car on a, pour toute $b \in \overline{Q}_1$,

$$\phi(hb) \circ \bigoplus_{a \in \overline{Q}_1 / ha=x_+} P_{ta}(b) = \overline{V}_1(b) \circ \phi(tb) = 0.$$

En effet, d'une part, $\text{Im}(\phi(tb)) = \{0\}$ ou $\text{Vect}(s_b)$ et on a $\text{Vect}(s_b) \subset \ker(\overline{V}_1(b))$. D'autre part, si $(y_a)_{a \in \overline{Q}_1 / ha=x_+} \in \bigoplus_{a \in \overline{Q}_1 / ha=x_+} P_{ta}(tb)$, alors

$$\bigoplus_{a \in \overline{Q}_1 / ha=x_+} P_{ta}(b) \left((y_a)_{a \in \overline{Q}_1 / ha=x_+} \right) = (b \circ y_a)_{a \in \overline{Q}_1 / ha=x_+}$$

et, pour que l'image de ceci par $\phi(hb)$ soit non nulle, il faudrait qu'il existe a telle que $b \circ y_a \in [hb, hb]$. Mais c'est impossible car $b \circ y_a$ serait alors un chemin fermé.

On voudrait en déduire un morphisme entre M et \overline{V}_1 par passage au quotient. Pour cela, soit $k.e(x_+) \in P_{x_+}(x_+)$ (les autres espaces vectoriels $P_{x_+}(x)$ sont triviaux). On a $i(k.e(x_+)) \in \bigoplus_{a \in \overline{Q}_1 / ha=x_+} P_{ta}(x_+)$ et donc, $\phi(x_+)(i(k.e(x_+))) = 0$ (car $\phi(x_+) = 0$). On peut donc passer au quotient et on obtient, par définition de M , un morphisme de représentations

$$\overline{\phi} : M \longrightarrow \overline{V}_1.$$

Notons \overline{V}_3 l'image de ce morphisme. Il s'agit d'une sous-représentation de \overline{V}_1 . De plus, $c^{\overline{V}_1} \neq 0$ (il est de poids $\langle \overline{\alpha} - \gamma_-, \cdot \rangle \neq 0$). Donc, par le lemme 1 (proposition contraposée)

du premier point), on a $\langle \underline{d}(\overline{V}_3), \overline{\beta} \rangle \geq 0$.

D'autre part, on a également $c^M = D^+ \neq 0$ donc, si on applique de la même manière le lemme 1 au noyau, noté N , du morphisme $\overline{\phi}$ (qui est une sous-représentation de M), on obtient que $\langle \underline{d}(N), \overline{\beta} \rangle \geq 0$. Or, comme $\overline{V}_3 = \text{Im}(\overline{\phi})$, on a $\underline{d}(\overline{V}_3) = \underline{d}(M) - \underline{d}(N)$. D'où

$$\langle \underline{d}(\overline{V}_3), \overline{\beta} \rangle = \langle \gamma_+, \overline{\beta} \rangle - \langle \underline{d}(N), \overline{\beta} \rangle = -\langle \underline{d}(N), \overline{\beta} \rangle \leq 0.$$

Ainsi, $\langle \underline{d}(\overline{V}_3), \overline{\beta} \rangle = 0$. On en déduit, encore par le lemme 1 (on utilise le deuxième point cette fois), que $c^{\overline{V}_3}$ divise c^M , i.e. divise D^+ . Mais D^+ est un semi-invariant irréductible, donc on a $c^{\overline{V}_3} = D^+$ (à multiplication par un scalaire près, comme toujours), ce qui nous montre que \overline{V}_3 est bien la sous-représentation de \overline{V} recherchée.

Obtention de V : Comme \overline{V}_3 est une sous-représentation de \overline{V}_1 , on a la suite exacte suivante :

$$0 \longrightarrow \overline{V}_3 \longrightarrow \overline{V}_1 \longrightarrow \overline{V}_4 \longrightarrow 0.$$

On a de plus vu que $\langle \underline{d}(\overline{V}_1), \overline{\beta} \rangle = \langle \underline{d}(\overline{V}_3), \overline{\beta} \rangle = 0$ donc, par le lemme 1 (deuxième point), on a $c^{\overline{V}_1} = c^{\overline{V}_4} c^{\overline{V}_3}$ (en tant que polynômes sur $\text{Rep}(\overline{Q}, \overline{\beta})$). En appliquant la même chose à la suite exacte

$$0 \longrightarrow \overline{V}_1 \longrightarrow \overline{V} \longrightarrow \overline{V}_2 \longrightarrow 0,$$

on a :

$$\begin{aligned} c^{\overline{V}} &= c^{\overline{V}_2} c^{\overline{V}_1} \\ &= c^{\overline{V}_2} c^{\overline{V}_4} c^{\overline{V}_3} \\ &= D^- c^{\overline{V}_4} D^+. \end{aligned}$$

Il nous reste donc seulement à écrire ce $c^{\overline{V}_4}$ comme un c^V .

On définit pour cela la sous-représentation \overline{V}_5 de \overline{V}_4 comme étant la "restriction" de cette dernière au seul sommet x_+ (i.e. on prend $\overline{V}_5(x_+) = \overline{V}_4(x_+)$ et c'est le seul espace vectoriel de cette représentation à être non trivial). On a alors une nouvelle suite exacte :

$$0 \longrightarrow \overline{V}_5 \longrightarrow \overline{V}_4 \longrightarrow \overline{V}_6 \longrightarrow 0,$$

avec la représentation \overline{V}_6 ainsi définie qui vérifie $\overline{V}_6(x_-) = \overline{V}_6(x_+) = \{0\}$ (car on a $\overline{V}_4(x_-) = \{0\}$ et car $\overline{V}_5(x_+) = \overline{V}_4(x_+)$). On note donc V la restriction de \overline{V}_6 au carquois Q .

Soit $W \text{ Rep}(Q, \beta)$. On prolonge W en une représentation \overline{W} de \overline{Q} en posant $\overline{W}(x_-) = \bigoplus_{a \in \overline{Q}_1 / ta=x_-} W(ha)$, $\overline{W}(x_+) = \bigoplus_{b \in \overline{Q}_1 / hb=x_+} W(tb)$ et, pour toutes a_0 et b_0 telles que $ta_0 = x_-$ et $hb_0 = x_+$,

$$\begin{aligned} \overline{W}(a_0) : \quad & \bigoplus_{a \in \overline{Q}_1 / ta=x_-} W(ha) \longrightarrow W(ha_0) \\ & (v_a)_{a \in \overline{Q}_1 / ta=x_-} \longmapsto v_{a_0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{W}(b_0) : W(tb_0) &\longrightarrow W(tb_0) \oplus \bigoplus_{b \in \overline{Q}_1 \setminus \{b_0\} / hb=x_+} W(tb) \\ v &\longmapsto (v, 0) \end{aligned} .$$

On va, comme précédemment pour \overline{V} , décomposer cette représentation \overline{W} en différentes sous-représentations. On commence par définir \overline{W}_1 comme la restriction de \overline{W} au seul sommet x_+ , ce qui nous permet, grâce à la suite exacte

$$0 \longrightarrow \overline{W}_1 \longrightarrow \overline{W} \longrightarrow \overline{W}_2 \longrightarrow 0,$$

d'obtenir une nouvelle représentation \overline{W}_2 , dont on considère une sous-représentation \overline{W}_3 , restriction de \overline{W}_2 au carquois \overline{Q} privé du sommet x_- (et donc également des flèches qui en partent). On remarque que la représentation \overline{W}_3 de \overline{Q} a été définie de manière à vérifier $\overline{W}_3(x_-) = \overline{W}_3(x_+) = \{0\}$ et de sorte que sa restriction à Q soit W . On a une dernière suite exacte à considérer :

$$0 \longrightarrow \overline{W}_3 \longrightarrow \overline{W}_2 \longrightarrow \overline{W}_4 \longrightarrow 0.$$

Alors, $c^{\overline{V}_4}$ est un semi-invariant non nul (car de poids correspondant au vecteur dimension de \overline{V}_4 , qui est non nul), donc $\langle \underline{d}(\overline{V}_4), \underline{d}(\overline{W}) \rangle = \langle \underline{d}(\overline{V}_4), \underline{d}(\overline{W}_1) \rangle = 0$. D'où, par le lemme 1 (quatrième point),

$$c^{\overline{V}_4}(\overline{W}) = c^{\overline{V}_4}(\overline{W}_1) c^{\overline{V}_4}(\overline{W}_2).$$

On fait de même avec la dernière suite exacte donnée, et on obtient :

$$c^{\overline{V}_4}(\overline{W}) = c^{\overline{V}_4}(\overline{W}_1) c^{\overline{V}_4}(\overline{W}_3) c^{\overline{V}_4}(\overline{W}_4).$$

De plus, comme $\underline{d}(\overline{W}_1)$ n'est non nul qu'en x_+ , on a, pour tout $W' \in \text{Rep}(\overline{Q}, \underline{d}(\overline{W}_1))$,

$$\begin{aligned} d_{W'}^{\overline{V}_4} : \text{Hom}(\overline{V}_4(x_+), W'(x_+)) &\longrightarrow \bigoplus_{a \in \overline{Q}_1 / ha=x_+} \text{Hom}(\overline{V}_4(ta), W'(x_+)) \\ f &\longmapsto (f \circ \overline{V}_4(a))_{a \in \overline{Q}_1 / ha=x_+} \end{aligned} ,$$

et donc $\det d_{W'}^{\overline{V}_4}$ ne dépend pas de W' . Autrement dit, $c^{\overline{V}_4}$ est constant sur $\text{Rep}(\overline{Q}, \underline{d}(\overline{W}_1))$. De même, comme $\underline{d}(\overline{W}_4)$ n'est non nul qu'en x_- , $c^{\overline{V}_4}$ est constant sur $\text{Rep}(\overline{Q}, \underline{d}(\overline{W}_4))$. Ainsi, comme tout est défini à multiplication par un scalaire près,

$$c^{\overline{V}_4}(\overline{W}) = c^{\overline{V}_4}(\overline{W}_3).$$

Enfin, en appliquant une nouvelle fois le deuxième point du lemme 1, on a que

$$c^{\overline{V}_4}(\overline{W}_3) = c^{\overline{V}_5}(\overline{W}_3) c^{\overline{V}_6}(\overline{W}_3),$$

et on montre comme précédemment que $c^{\overline{V}_5}$ est constant sur $\text{Rep}(\overline{Q}, \underline{d}(\overline{W}_3))$ (car \overline{V}_5 est la restriction de \overline{V}_4 au sommet x_+ et car $\underline{d}(\overline{W}_3)(x_+) = 0$). Ainsi,

$$c^{\overline{V}_4}(\overline{W}) = c^{\overline{V}_4}(\overline{W}_3) = c^{\overline{V}_6}(\overline{W}_3) = c^V(W) \text{ (au vu des remarques faites sur } \overline{V}_6 \text{ et } \overline{W}_3).$$

On a donc montré ce que l'on voulait, puisque cela donne :

$$c^{\overline{V}} = D^- c^V D^+.$$

□

Remarque : Dans cette preuve, au moment de prouver que $c^{\overline{V}_2} = D^-$ et que $c^M = D^+$, on a par deux fois utilisé le fait que, si on a une configuration du type :

$$y_1 \longrightarrow y_2$$

le seul semi-invariant (à multiplication par une constante près) de poids 1 sur y_1 et -1 sur y_2 est le déterminant. Si on essaie de prouver "à la main" ces égalités entre semi-invariants, on remarque que les deux cas sont très différents. En effet, voir que $c^{\overline{V}_2} = D^-$ n'est pas difficile puisque :

$$\begin{aligned} c^{\overline{V}_2} : \text{Rep}(\overline{Q}, \overline{\beta}) &\longrightarrow \mathbb{K} \\ \overline{W} &\longmapsto \det d_{\overline{W}}^{\overline{V}_2}, \end{aligned}$$

et on a, pour tout $\overline{W} \in \text{Rep}(\overline{Q}, \overline{\beta})$,

$$\begin{aligned} d_{\overline{W}}^{\overline{V}_2} : \text{Hom}(\mathbb{K}, \mathbb{K}^{\overline{\beta}(x_-)}) &\longrightarrow \bigoplus_{a \in \overline{Q}_1 / ta=x_-} \text{Hom}(\mathbb{K}, \mathbb{K}^{\overline{\beta}(ha)}) \\ f &\longmapsto (-\overline{W}(a)f)_{a \in \overline{Q}_1 / ta=x_-}. \end{aligned}$$

Donc, par définition de D^- , on a $\det d_{\overline{W}}^{\overline{V}_2} = D^-(\overline{W})$, et ce pour tout $\overline{W} \in \text{Rep}(\overline{Q}, \overline{\beta})$. D'où $c^{\overline{V}_2} = D^-$.

Par contre, montrer "à la main" que $c^M = D^+$ semble beaucoup plus difficile. J'ai personnellement passé beaucoup de temps à essayer de le faire, sans tellement de réussite. Le vérifier sur des exemples de carquois particuliers est possible, mais déjà pas simple, et on aboutit à des déterminants qui se simplifient de manière surprenante et assez peu généralisable a priori...

L'intérêt de cette proposition est que, à présent, pour montrer le théorème 1, c'est-à-dire pour montrer que $\text{SI}(Q, \beta)$ est engendré par les semi-invariants de la forme c^V , il suffit de montrer que $\text{SI}(\overline{Q}, \overline{\beta})_{\overline{\sigma}}$ est engendré par de tels éléments. En effet, si $\text{SI}(\overline{Q}, \overline{\beta})_{\overline{\sigma}}$ est engendré par des éléments de la forme $c^{\overline{V}}$, $\text{SI}(Q, \beta)_{\sigma}$ sera alors engendré par les c^V qui correspondent aux $c^{\overline{V}}$ par l'isomorphisme ϕ .

2.2.3 Deuxième étape : suppression des sommets x_i ($i \in \llbracket 1, n \rrbracket$)

On considère ici, pour l'instant, un carquois Q' (toujours sans cycle orienté), muni d'un vecteur dimension β' et d'un poids σ' . On suppose de plus qu'il existe $x \in Q'_0$ tel

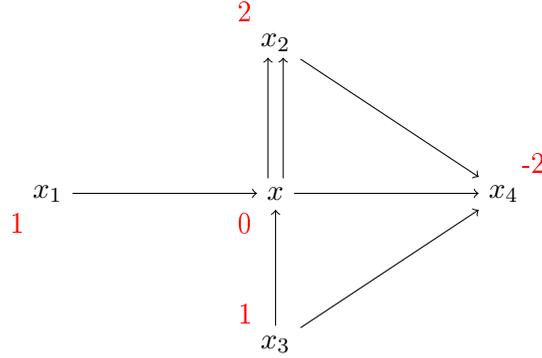
que $\sigma'(e_x) = 0$. On va noter a_1, \dots, a_s les flèches dans Q'_1 qui arrivent sur le sommet x et b_1, \dots, b_t celles qui partent de ce sommet.

On va définir un nouveau carquois noté \overline{Q}' tel que $\overline{Q}'_0 = Q'_0 \setminus \{x\}$ et

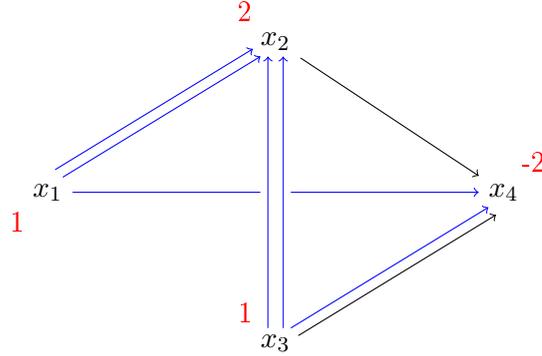
$$\overline{Q}'_1 = (Q'_1 \setminus \{a_1, \dots, a_s, b_1, \dots, b_t\}) \cup \{ba_{k,l}; 1 \leq k \leq s, 1 \leq l \leq t\},$$

où, pour tout $(k, l) \in \llbracket 1, s \rrbracket \times \llbracket 1, t \rrbracket$, la flèche $ba_{k,l}$ va du sommet ta_k au sommet hb_l . On note de plus $\overline{\beta}'$ et $\overline{\sigma}'$ les restrictions respectives de β' et σ' à \overline{Q}'_0 .

Donnons un exemple : si l'on part du carquois Q' suivant, où est écrite, en rouge, à côté de chaque sommet y , la valeur de σ' en e_y :



On obtient un carquois \overline{Q}' de la forme :



où la valeur de $\overline{\sigma}'$ en e_y est écrite en rouge à côté du sommet y concerné.

Par le théorème fondamental de la théorie des invariants [1], tout semi-invariant élément de $\text{SI}(Q', \beta')_{\sigma'}$ s'obtient d'un élément de $\text{SI}(\overline{Q}', \overline{\beta}')_{\overline{\sigma}'}$ en remplaçant simplement les flèches $ba_{k,l}$ par les compositions $b_l \circ a_k$. Montrons que, si l'on applique ce procédé en partant d'un semi-invariant $c^{\overline{V}} \in \text{SI}(\overline{Q}', \overline{\beta}')_{\overline{\sigma}'}$, on obtient un semi-invariant de la forme c^V :

Soit une représentation \overline{V} du carquois \overline{Q}' , de dimension $\overline{\alpha}$. On définit la représentation V de Q' de la manière suivante en ce qui concerne les espaces vectoriels :

$$\forall y \in Q'_0, V(y) = \begin{cases} \overline{V}(y) & \text{si } y \neq x \\ \bigoplus_{k=1}^s \overline{V}(ta_k) & \text{si } y = x \end{cases}.$$

Remarque : La dimension de $V(x)$ nous est imposée. En effet, on veut que c^V ait pour poids σ' . Il faut donc avoir $\langle d(V), \cdot \rangle = \sigma'$, ce qui donne, lorsqu'appliqué à e_x ,

$$\dim V(x) - \sum_{k=1}^s \dim V(ta_k) = 0.$$

D'où le choix fait pour $V(x)$.

Une fois les espaces vectoriels définis de cette manière, le choix des applications linéaires se fait de manière naturelle :

$$\forall a \in Q'_1, V(a) = \begin{cases} \bar{V}(a) & \text{si } a \notin \{ba_{k,l}; 1 \leq k \leq s, 1 \leq l \leq t\} \\ i_k & \text{s'il existe } k \in \llbracket 1, s \rrbracket \text{ tel que } a = a_k \\ \sum_{k=1}^s \bar{V}(ba_{k,l}) & \text{s'il existe } l \in \llbracket 1, t \rrbracket \text{ tel que } a = b_l \end{cases},$$

où, pour tout $k \in \llbracket 1, s \rrbracket$,

$$i_k : \begin{array}{ccc} \bar{V}(ta_k) & \longrightarrow & \bigoplus_{r=1}^s \bar{V}(ta_r) \\ v & \longmapsto & (0, \dots, 0, \underset{\uparrow k}{v}, 0, \dots, 0) \end{array}.$$

Soit à présent une représentation W de Q' de vecteur dimension β' . On note \bar{W} sa "restriction" à \bar{Q}' , qui est de dimension $\bar{\beta}'$ (on enlève l'espace vectoriel sur le sommet x , et on pose, pour tout $(k, l) \in \llbracket 1, s \rrbracket \times \llbracket 1, t \rrbracket$, $\bar{W}(ba_{k,l}) = W(b_l) \circ W(a_k)$). Il faut vérifier que l'on a $c^{\bar{V}}(\bar{W}) = c^V(W)$.

On rappelle que $c^{\bar{V}}(\bar{W})$ et $c^V(W)$ sont respectivement les déterminants des applications linéaires suivantes :

$$d_{\bar{W}}^{\bar{V}} : \begin{array}{ccc} \bigoplus_{y \in \bar{Q}'_0} \text{Hom}(\bar{V}(y), \bar{W}(y)) & \longrightarrow & \bigoplus_{a \in \bar{Q}'_1} \text{Hom}(\bar{V}(ta), \bar{W}(ha)) \\ (f(y))_{y \in \bar{Q}'_0} & \longmapsto & (f(ha) \circ \bar{V}(a) - \bar{W}(a) \circ f(ta))_{a \in \bar{Q}'_1} \end{array}$$

et

$$d_W^V : \begin{array}{ccc} \bigoplus_{y \in Q'_0} \text{Hom}(V(y), W(y)) & \longrightarrow & \bigoplus_{a \in Q'_1} \text{Hom}(V(ta), W(ha)) \\ (f(y))_{y \in Q'_0} & \longmapsto & (f(ha) \circ V(a) - W(a) \circ f(ta))_{a \in Q'_1} \end{array}.$$

Cherchons à écrire la matrice de cette dernière application. On considère donc bien sûr une base dans chacun des espaces vectoriels $\bar{V}(y)$ (pour $y \in \bar{Q}'_0$) et $W(y)$ (pour $y \in Q'_0$), ce qui nous donne des bases dans les espaces d'arrivée et de départ de d_W^V . On va, de plus, "découper" ces espaces de la manière suivante :

$$\bigoplus_{y \in Q'_0} \text{Hom}(V(y), W(y)) = D_1 \oplus D_2 \oplus D_3 \oplus D_4,$$

avec

$$D_1 = \bigoplus_{\left\{ \begin{array}{l} \text{sommets } y \text{ sans} \\ \text{flèche entre } x \text{ et } y \end{array} \right\}} \text{Hom}(V(y), W(y)),$$

$$D_2 = \bigoplus_{\left\{ \begin{array}{l} \text{sommets } y \text{ tels que} \\ x \xrightarrow{b_l} y \end{array} \right\}} \text{Hom}(V(y), W(y)),$$

$$D_3 = \bigoplus_{\left\{ \begin{array}{l} \text{sommets } y \text{ tels que} \\ y \xrightarrow{a_k} x \end{array} \right\}} \text{Hom}(V(y), W(y)),$$

et

$$D_4 = \text{Hom}(V(x), W(x)).$$

De même,

$$\bigoplus_{a \in Q'_1} \text{Hom}(V(ta), W(ha)) = A_1 \oplus A_2 \oplus A_3,$$

avec

$$A_1 = \bigoplus_{a \neq a_k, b_l} \text{Hom}(V(ta), W(ha)),$$

$$A_2 = \bigoplus_{l=1}^t \text{Hom}(V(tb_l), W(hb_l)),$$

et

$$A_3 = \bigoplus_{k=1}^s \text{Hom}(V(ta_k), W(ha_k)).$$

La matrice de d_W^V est alors de la forme :

$$\begin{array}{ccc} D_1 & D_2 & D_3 & D_4 \\ \left(\begin{array}{cccc} A & B & C & (0) \\ (0) & D & (0) & \text{Mat}(f \mapsto -W(b_l) \circ f)_{1 \leq l \leq t} \\ (0) & (0) & \text{Mat}(f \mapsto -W(a_k) \circ f)_{1 \leq k \leq s} & \text{Mat}(f \mapsto f \circ V(a_k))_{1 \leq k \leq s} \end{array} \right) & \begin{array}{l} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array} \end{array} .$$

où $D = \text{Mat}(f \mapsto f \circ V(b_l))_{1 \leq l \leq t}$. On remarque que le bloc en bas à droite correspond en fait à l'identité, de par la définition des $V(a_k)$, pour tout $k \in \llbracket 1, s \rrbracket$. On effectue alors

l'opération élémentaire (par blocs) sur les lignes de cette matrice qui consiste à faire, si on note $M = \text{Mat}(f \mapsto -W(b_l) \circ f)_{1 \leq l \leq t}$:

$$\begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} E + MG & F + MH \\ G & H \end{pmatrix}.$$

Cela donne la matrice

$$\begin{pmatrix} A & B & & C & & (0) \\ (0) & D & \text{Mat}(f \mapsto -W(b_l) \circ W(a_k) \circ f)_{1 \leq l \leq t, 1 \leq k \leq s} & & & (0) \\ (0) & (0) & & \text{Mat}(f \mapsto -W(a_k \circ f)_{1 \leq k \leq s} & & I \end{pmatrix}$$

Or, la matrice de $d_{\overline{W}}^{\overline{V}}$ est :

$$\begin{matrix} D_1 & D_2 & & D_3 \\ \left(\begin{array}{cccc} A & B & & C \\ (0) & D & \text{Mat}(f \mapsto -\overline{W}(ba_{k,l}) \circ f)_{1 \leq l \leq t, 1 \leq k \leq s} \end{array} \right) & \begin{matrix} A_1 \\ A_2' \end{matrix} \end{matrix},$$

où $A_2' = \bigoplus_{k=1}^s \bigoplus_{l=1}^t \text{Hom}(V(tba_{k,l}), W(hba_{k,l}))$.

Donc, par déterminant par blocs, on a

$$c^{\overline{V}}(\overline{W}) = c^V(W).$$

Ainsi, on a bien montré que tout semi-invariant de la forme $c^{\overline{V}} \in \text{SI}(\overline{Q}, \overline{\beta'})_{\overline{\sigma}}$ donne un invariant de type c^V . Donc, si on arrive à montrer que $\text{SI}(\overline{Q}, \overline{\beta'})_{\overline{\sigma}}$ est engendré par les semi-invariants de cette forme, comme tout élément de $\text{SI}(Q', \beta')_{\sigma'}$ s'obtient à partir d'un élément de $\text{SI}(\overline{Q}, \overline{\beta'})_{\overline{\sigma}}$, on aura que $\text{SI}(Q', \beta')_{\sigma'}$ est engendré par les semi-invariants de la forme c^V .

Revenons au carquois \overline{Q} construit lors de l'étape précédente, muni du vecteur dimension $\overline{\beta}$ et du poids $\overline{\sigma}$. On rappelle que l'on veut montrer que $\text{SI}(\overline{Q}, \overline{\beta})_{\overline{\sigma}}$ est engendré par les éléments de la forme $c^{\overline{V}}$.

Comme $\overline{\sigma}(e_{x_i}) = 0$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on peut appliquer ce que l'on vient de faire sur un carquois Q' quelconque à notre carquois \overline{Q} . Cela nous permet d'obtenir (au bout de n étapes) un carquois composé de deux sommets, x_- et x_+ , et d'un certain nombre

(noté m) de flèches allant de x_- à x_+ . Ce carquois, que l'on avait noté Θ_m , est muni du vecteur dimension $\theta(d)$ (où $d = \bar{\beta}(x_-)$) et du poids τ . De plus, d'après ce que l'on vient de voir, il nous suffit, pour avoir la conclusion cherchée, de montrer que $\text{SI}(\Theta_m, \theta(d))_\tau$ est engendré par les semi-invariants de la forme c^V .

Remarque : Le vecteur dimension obtenu est bien $\theta(d)$. En effet, par cette deuxième étape, on obtient un vecteur dimension sur Θ_m qui est la restriction de $\bar{\beta}$ à $\{x_-, x_+\}$. Or, on a $\bar{\sigma}(\bar{\beta}) = 0$ (sinon, $\text{SI}(\bar{Q}, \bar{\beta})_{\bar{\sigma}} = \{0\}$ et ce cas ne nous intéresse pas), ce qui signifie, d'après l'expression de $\bar{\sigma}$, que $\bar{\beta}(x_-) = \bar{\beta}(x_+)$.

2.2.4 Troisième étape : cas du carquois Θ_m

Le carquois Θ_m possède m flèches (toutes de x_- à x_+) que nous allons noter a_1, \dots, a_m . Un élément $W \in \text{Rep}(\Theta_m, \theta(d))$ est alors une famille $(W(a_i))_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket}$ de m applications linéaires de W_- dans W_+ (qui sont en fait tous les deux \mathbb{K}^d). On a donc :

$$\text{Rep}(\Theta_m, \theta(d)) = \text{Hom}(W_-, W_+)^m \simeq \text{Hom}(\mathbb{K}^m, \text{Hom}(W_-, W_+)).$$

En effet, si E est un \mathbb{K} -espace vectoriel, on a $E^m \simeq \text{Hom}(\mathbb{K}^m, E)$ par l'application

$$\begin{aligned} E^m &\longrightarrow \text{Hom}(\mathbb{K}^m, E) \\ (v_1, \dots, v_m) &\longmapsto \text{l'unique application linéaire } \tilde{v} \text{ telle que, } \forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket, \tilde{v}(e_i) = v_i \end{aligned}$$

où (e_1, \dots, e_m) est la base canonique de \mathbb{K}^m .

Ainsi,

$$\text{Rep}(\Theta_m, \theta(d)) \simeq (\mathbb{K}^m)^* \otimes W_-^* \otimes W_+.$$

On a donc

$$\begin{aligned} \mathbb{K}[\text{Rep}(\Theta_m, \theta(d))] &\simeq \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \text{Sym}^k (\mathbb{K}^m \otimes W_- \otimes W_+^*) \\ &\quad \text{(où Sym désigne la puissance symétrique)} \\ &\simeq \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \bigoplus_{\lambda \text{ partitions de } k} (S_\lambda W_- \otimes S_\lambda (W_+^* \otimes \mathbb{K}^m)) \quad \text{(par [3])}, \end{aligned}$$

où $S_\lambda E$ désigne le module de Schur de E correspondant à la partition λ , avec la convention que $S_\lambda E = \{0\}$ si $\text{ht } \lambda > \dim E$ (où $\text{ht } \lambda$ est le nombre d'entiers non nuls dans la partition λ).

Donc :

$$\mathbb{K}[\text{Rep}(\Theta_m, \theta(d))]^{\text{SL}(W_-)} \simeq \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \bigoplus_{\lambda \text{ partitions de } k} \left((S_\lambda W_-)^{\text{SL}(W_-)} \otimes S_\lambda (W_+^* \otimes \mathbb{K}^m) \right).$$

Or, $(S_\lambda W_-)^{\text{SL}(W_-)} \neq \{0\}$ si et seulement si λ est de la forme $\underbrace{(\nu, \dots, \nu)}_{\dim W_- \text{ fois}}$, avec $\nu \in \mathbb{N}^*$.

Remarque : Par exemple, $S_{(1,\dots,1)}W_- = \Lambda^d W_-$ (on rappelle que $d = \dim W_-$) et un élément $g \in \mathrm{GL}(W_-)$ agit par multiplication par $\det g$. Pour $S_{(\nu,\dots,\nu)}W_-$, un tel élément g agit par multiplication par $(\det g)^\nu$.

On en déduit que :

$$\mathbb{K}[\mathrm{Rep}(\Theta_m, \theta(d))]^{\mathrm{SL}(W_-)} \simeq \bigoplus_{k \in \mathbb{N}^*} (S_{k^d} W_- \otimes S_{k^d}(W_+^* \otimes \mathbb{K}^m)),$$

(en notant $k^d = \underbrace{(k, \dots, k)}_{d \text{ fois}}$). De plus, on va considérer seulement les éléments de poids τ ,

et on a $\tau(e_{x_-}) = 1$. Or, par la remarque précédente (concernant l'action de $\mathrm{GL}(W_-)$ sur les $S_{(k,\dots,k)}W_-$), on ne va avoir des semi-invariants de poids 1 sur x_- que lorsque $k = 1$. D'où :

$$\begin{aligned} \mathbb{K}[\mathrm{Rep}(\Theta_m, \theta(d))]_{\tau|_{\{x_-\}}}^{\mathrm{SL}(W_-)} &\simeq S_{1^d} W_- \otimes S_{1^d}(W_+^* \otimes \mathbb{K}^m) \\ &= \Lambda^d W_- \otimes \Lambda^d(W_+^* \otimes \mathbb{K}^m). \end{aligned}$$

Et donc :

$$\mathrm{SI}(\Theta_m, \theta(d))_\tau \simeq \Lambda^d W_- \otimes \Lambda^d(W_+^* \otimes \mathbb{K}^m)_{\tau|_{\{x_+\}}}^{\mathrm{SL}(W_+)}.$$

Puisque l'on a

$$\Lambda^d(W_+^* \otimes \mathbb{K}^m) \simeq \bigoplus_{\lambda \text{ partitions de } d} (S_\lambda W_+^* \otimes S_{t_\lambda} \mathbb{K}^m),$$

(où t_λ est la partition conjuguée de λ) on obtient, par le même raisonnement que sur W_- ,

$$\begin{aligned} \mathrm{SI}(\Theta_m, \theta(d))_\tau &\simeq \Lambda^d W_- \otimes S_{1^d} W_+^* \otimes S_{1^d} \mathbb{K}^m \\ &= \Lambda^d W_- \otimes \Lambda^d W_+^* \otimes \mathrm{Sym}^d \mathbb{K}^m. \end{aligned}$$

Travaillons donc à partir de cette dernière expression. La puissance symétrique $\mathrm{Sym}^d \mathbb{K}^m$ est engendrée comme $\mathrm{GL}_m(\mathbb{K})$ -module par son vecteur de plus haut poids (sous l'action de $T = \{g \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{K}) / g \text{ est diagonale}\}$). Or, celui-ci correspond à l'application $W(a_1)$. En effet, dans ce cas-là, le vecteur de poids dominant est le premier vecteur de la base de \mathbb{K}^m , qui correspond, par l'isomorphisme donné au début de cette étape, au premier élément de la famille $(W(a_i))_{i \in [1, m]}$, i.e. $W(a_1)$. Ainsi, comme $\mathrm{SI}(\Theta_m, \theta(d))_\tau \simeq \Lambda^d W_- \otimes \Lambda^d W_+^* \otimes \mathrm{Sym}^d \mathbb{K}^m$, l'espace à poids $\mathrm{SI}(\Theta_m, \theta(d))_\tau$ est engendré par le semi-invariant correspondant : $W \mapsto \det W(a_1)$.

Exprimons donc ce semi-invariant sous la forme d'un c^V :

Remarquons tout d'abord grâce au lemme 2 que $\tau = \langle \alpha, \cdot \rangle$, où α est le vecteur dimension défini par $\alpha(x_-) = 1$ et $\alpha(x_+) = m - 1$. On rappelle que la représentation V cherchée doit alors nécessairement être de dimension α . On définit donc $V \in \mathrm{Rep}(\Theta_m, \alpha)$ par $V(a_1) = 0$ et, pour tout $i \in [2, m]$,

$$V(a_i) : \begin{array}{ccc} \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K}^{m-1} \\ k & \longmapsto & k \cdot e_{i-1} \end{array},$$

où (e_1, \dots, e_{m-1}) est la base canonique de \mathbb{K}^{m-1} .

Vérifions qu'on a alors, pour tout $W \in \text{Rep}(\Theta_m, \theta(d))$, $c^V(W) = \det W(a_1)$. Soit $W \in \text{Rep}(\Theta_m, \theta(d))$. $c^V(W)$ est défini comme étant le déterminant de

$$\begin{aligned} d_W^V : \text{Hom}(V(x_-), W(x_-)) \oplus \text{Hom}(V(x_+), W(x_+)) &\longrightarrow \bigoplus_{i=1}^m \text{Hom}(V(x_-), W(x_+)) \\ (f_-, f_+) &\longmapsto (f_+ \circ V(a_i) - W(a_i) \circ f_-)_{1 \leq i \leq m} \end{aligned}$$

Ecrivons la matrice de cette application linéaire dans des bases adaptées aux décompositions en sommes directes des espaces de départ et d'arrivée :

$$\left(\begin{array}{cc} \text{Hom}(V(x_-), W(x_-)) & \text{Hom}(V(x_+), W(x_+)) \\ \text{Mat}(f_- \mapsto -W(a_1) \circ f_-) & (0) \\ (\star) & \text{Mat} \left(f_+ \mapsto f_+ \circ \left(\sum_{i=2}^m V(a_i) \right) \right) \end{array} \right) \begin{array}{l} \text{Hom}(V(ta_1), W(ha_1)) \\ \bigoplus_{i=2}^m \text{Hom}(V(ta_i), W(ha_i)) \end{array}$$

Or,

$$\begin{aligned} \sum_{i=2}^m V(a_i) : \bigoplus_{i=2}^m \mathbb{K} &\longrightarrow \mathbb{K}^{m-1} \\ (k_2, \dots, k_m) &\longmapsto \sum_{i=2}^m V(a_i)(k_i) = (k_2, \dots, k_m) \end{aligned}$$

donc $\sum_{i=2}^m V(a_i) = \text{Id}_{\mathbb{K}^{m-1}}$ et donc $(f_+ \mapsto f_+ \circ (\sum_{i=2}^m V(a_i))) = \text{Id}_{\text{Hom}(\mathbb{K}^{m-1}, \mathbb{K}^d)}$. Ainsi, par déterminant par bloc :

$$c^V(W) = \det W(a_1) \text{ (modulo multiplication par une constante).}$$

D'où $c^V = (W \mapsto \det W(a_1))$ et, par ce qui précède, c^V engendre $\text{SI}(\Theta_m, \theta(d))_\tau$. Le théorème 1 est ainsi démontré.

3 Conséquences du résultat principal

3.1 Un corollaire immédiat, puis la saturation de $\Sigma(Q, \beta)$

Donnons une première conséquence, assez immédiate, du théorème 1 :

Corollaire 1. (propriété de réciprocity) Soient Q un carquois sans cycle orienté et α et β deux vecteurs dimension tels que $\langle \alpha, \beta \rangle = 0$. Alors,

$$\dim_{\mathbb{K}} \text{SI}(Q, \beta)_{\langle \alpha, \cdot \rangle} = \dim_{\mathbb{K}} \text{SI}(Q, \alpha)_{-\langle \cdot, \beta \rangle}.$$

Démonstration. D'après ce que l'on a vu dans la preuve du théorème 1, $\text{SI}(Q, \beta)_{\langle \alpha, \cdot \rangle}$ est engendré en tant qu'espace vectoriel par des éléments de la forme c^V , où $V \in \text{Rep}(Q, \alpha)$. On peut donc considérer $V_1, \dots, V_s \in \text{Rep}(Q, \alpha)$ telles que $(c^{V_1}, \dots, c^{V_s})$ soit une base de $\text{SI}(Q, \beta)_{\langle \alpha, \cdot \rangle}$. Ce sont alors des polynômes linéairement indépendants sur $\text{Rep}(Q, \beta)$. Il existe donc $W_1, \dots, W_s \in \text{Rep}(Q, \beta)$ telles que $\det((c^{V_i}(W_j))_{1 \leq i, j \leq s}) \neq 0$. De plus, pour tous $i, j \in \llbracket 1, s \rrbracket$, $c^{V_i}(W_j) = c_{W_j}(V_i)$. Donc le fait que ce déterminant soit non nul indique que les polynômes c_{W_1}, \dots, c_{W_s} sur $\text{Rep}(Q, \alpha)$ sont eux aussi linéairement indépendants. Ils sont de poids $-\langle \cdot, \beta \rangle$, donc éléments de $\text{SI}(Q, \alpha)_{-\langle \cdot, \beta \rangle}$. Ainsi,

$$\dim_{\mathbb{K}} \text{SI}(Q, \alpha)_{-\langle \cdot, \beta \rangle} \geq \dim_{\mathbb{K}} \text{SI}(Q, \beta)_{\langle \alpha, \cdot \rangle}.$$

En faisant le même raisonnement en inversant les rôles de α et β , on obtient l'inégalité dans l'autre sens. D'où l'égalité. \square

Étudions à présent d'autres conséquences du théorème 1. Elles vont consister en la caractérisation de l'ensemble

$$\Sigma(Q, \beta) = \{ \sigma \in \Gamma^* / \text{SI}(Q, \beta)_{\sigma} \neq \{0\} \},$$

et à voir que cet ensemble est saturé, ce qui signifie que, si $n\sigma \in \Sigma(Q, \beta)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $\sigma \in \Gamma^*$, alors $\sigma \in \Sigma(Q, \beta)$.

Mais il faut tout d'abord donner quelques résultats donnés par Schofield [7] : soient Q un carquois sans cycle orienté et α et β deux vecteurs dimension. On va dire que l'espace $\text{Hom}_Q(\alpha, \beta)$ (respectivement $\text{Ext}_Q(\alpha, \beta)$) est génériquement nul lorsque, pour des représentations générales V et W de dimensions respectives α et β , on a $\text{Hom}_Q(V, W) = \{0\}$ (respectivement $\text{Ext}_Q(V, W) = \{0\}$). Précisons que, quand on dit qu'une assertion est vérifiée pour une représentation générale V de dimension α , cela signifie qu'il existe un ouvert U de $\text{Rep}(Q, \alpha)$ pour la topologie de Zariski tel que, pour toute $V \in U$, cette assertion est vérifiée.

On va également écrire que $\alpha \hookrightarrow \beta$ lorsqu'une représentation générale de dimension β possède une sous-représentation de dimension α . Le résultat prouvé par Schofield que l'on va utiliser dans la suite est alors :

Théorème 2. *Si α et β sont deux vecteurs dimensions d'un carquois Q sans cycle orienté, on a :*

1. $\text{Ext}_Q(\alpha, \beta)$ est génériquement nul si et seulement si $\alpha \hookrightarrow \alpha + \beta$.
2. $\text{Ext}_Q(\alpha, \beta)$ n'est pas génériquement nul si et seulement s'il existe un vecteur dimension β' tel que $\beta' \hookrightarrow \beta$ et $\langle \alpha, \beta - \beta' \rangle < 0$.

Remarque : Supposons que $\langle \alpha, \beta \rangle = 0$ et considérons V et W des représentations générales de dimension respectives α et β . La condition du deuxième du théorème est alors équivalente à l'existence d'un vecteur dimension β' tel que $\beta' \hookrightarrow \beta$ et $\langle \alpha, \beta' \rangle > 0$.

Ainsi, si $c^V(W) = 0$, alors $\text{Ext}_Q(V, W) \neq \{0\}$ et W doit donc admettre une sous-représentation W' telle que $\langle \alpha, \underline{d}(W') \rangle > 0$. On voit donc que la réciproque du troisième point du lemme 1 est vraie pour les représentations générales V et W .

Donnons à présent le résultat suivant, qui va permettre de décrire l'ensemble $\Sigma(Q, \beta)$.

Théorème 3. *Soient Q un carquois sans cycle orienté et β un vecteur dimension. L'ensemble $\Sigma(Q, \beta)$ est alors l'ensemble des poids $\sigma \in \Gamma^*$ tels que :*

- $\sigma(\beta) = 0$,
- pour tout vecteur dimension β' tel que $\beta' \hookrightarrow \beta$, on a $\sigma(\beta') \leq 0$.

Ces conditions se traduisent en une équation linéaire homogène plus un nombre fini d'inéquations linéaires homogènes. En particulier, l'ensemble $\Sigma(Q, \beta)$ est saturé (on rappelle que cela signifie que : $n\sigma \in \Sigma(Q, \beta) \implies \sigma \in \Sigma(Q, \beta)$ lorsque $n \in \mathbb{N}^$).*

Démonstration. Soit $\sigma \in \Gamma^*$. On sait qu'il existe (un unique) $\alpha \in \Gamma$ tel que $\sigma = \langle \alpha, \cdot \rangle$.

Premier cas : Supposons que α est un vecteur dimension. Par le théorème 1 (ou plutôt, sa preuve), $\text{SI}(Q, \beta)_{\langle \alpha, \cdot \rangle}$ est engendré par les éléments de la forme c^V qui sont de ce poids, donc tels que V est de dimension α . Par conséquent, $\text{SI}(Q, \beta)_{\langle \alpha, \cdot \rangle} \neq \{0\}$ si et seulement s'il existe une représentation V de dimension α telle que $c^V \neq 0$ (en tant que polynôme sur $\text{Rep}(Q, \beta)$). Cette condition est équivalente à avoir $\sigma(\beta) = \langle \alpha, \beta \rangle = 0$ (pour que l'on puisse avoir un c^V qui s'applique à des éléments de $\text{Rep}(Q, \beta)$) et $\text{Ext}_Q(\alpha, \beta)$ qui est génériquement nul (car $c^V(W) \neq 0$ si et seulement si $\text{Ext}_Q(V, W) = \{0\}$).

Par le deuxième point du théorème 2, $\text{Ext}_Q(\alpha, \beta)$ est génériquement nul si et seulement si, pour tout vecteur dimension β' tel que $\beta' \hookrightarrow \beta$, on a $\langle \alpha, \beta - \beta' \rangle \geq 0$.

Ainsi, $\text{SI}(Q, \beta)_\sigma \neq \{0\}$ si et seulement si $\sigma(\beta) = 0$ et, pour tout β' tel que $\beta' \hookrightarrow \beta$, $\sigma(\beta') = \langle \alpha, \beta' \rangle \leq 0$.

Second cas : Supposons à présent que α n'est pas un vecteur dimension. En utilisant à nouveau le théorème 1, il n'existe donc pas d'éléments c^V de poids $n\sigma$, et ce pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ (car ceux-ci devraient avoir pour vecteur dimension $n\alpha$, qui n'en est pas un). D'où, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\text{SI}(Q, \beta)_{n\sigma} = \{0\}$. Soit $W \in \text{Rep}(Q, \beta)$. Par [4], on a alors $\sigma(\underline{d}(W)) \neq 0$ ou l'existence d'une sous-représentation W' de W telle que $\sigma(\underline{d}(W')) > 0$. Ainsi, en prenant pour W une représentation générale, on a donc : $\sigma(\beta) \neq 0$ ou il existe β' tel que $\beta' \hookrightarrow \beta$ et $\sigma(\beta') > 0$.

En rassemblant ces deux conclusions, on a bien la caractérisation annoncée pour les éléments de $\Sigma(Q, \beta)$. De plus, la saturation en est une conséquence immédiate puisque, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$n\sigma(\beta) = 0 \implies \sigma(\beta) = 0$$

et, pour tout vecteur dimension β' tel que $\beta' \hookrightarrow \beta$,

$$n\sigma(\beta') \leq 0 \implies \sigma(\beta') \leq 0.$$

□

Remarque 1 : A.D. King avait prouvé [4] un résultat similaire, mais moins fort et qui, en particulier, ne donnait pas la saturation de $\Sigma(Q, \beta)$. On dit qu'une représentation $W \in \text{Rep}(Q, \beta)$ est σ -stable lorsqu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \text{SI}(Q, \beta)_{n\sigma}$ tel que $f(W) \neq 0$. Le résultat donné par King est que $W \in \text{Rep}(Q, \beta)$ est σ -stable si et seulement si, pour toute sous-représentation W' de W , on a $\sigma(W') \leq 0$. Cela nous donne l'équivalence :

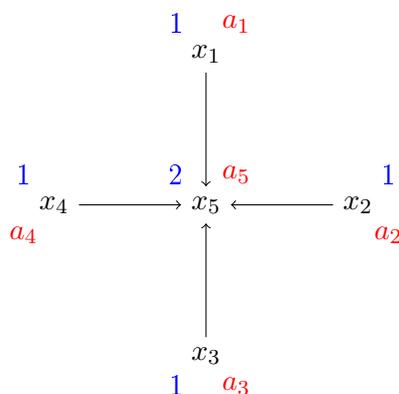
$$\exists n \in \mathbb{N}^* / \text{SI}(Q, \beta)_{n\sigma} \neq \{0\} \iff \sigma(\beta) = 0 \text{ et } , \forall \beta' / \beta' \hookrightarrow \beta, \text{ on a } \sigma(\beta') \leq 0.$$

On voit que ce résultat ne permet pas de déduire que $\Sigma(Q, \beta)$ est saturé.

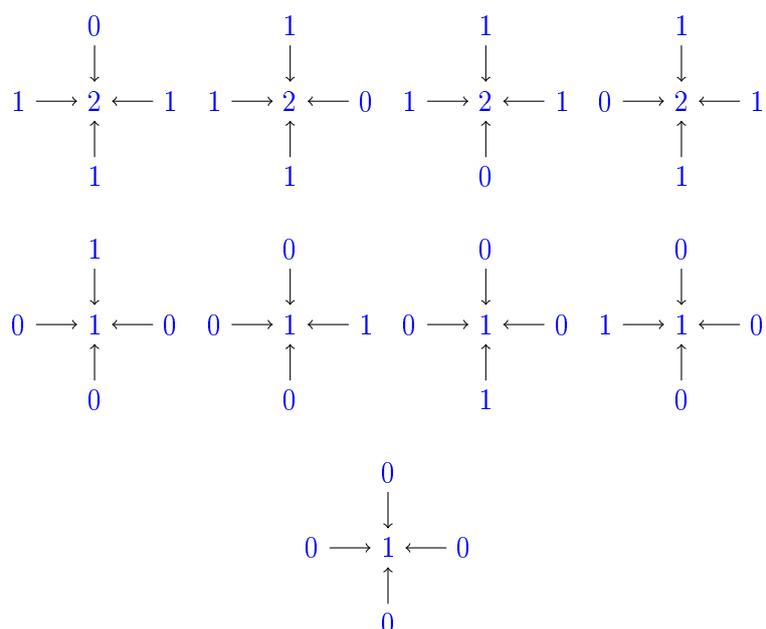
Remarque 2 : Dans le théorème 3, il est en fait seulement nécessaire de considérer les vecteurs dimension β' tels que $\beta' \hookrightarrow \beta$ et qu'une représentation générale de dimension β' est indécomposable (en somme directe). On rappelle que β' est alors appelé une racine de Schur. Le fait que l'on ait seulement besoin de considérer ces vecteurs dimension particuliers provient simplement du fait que, si l'on considère β' tel qu'une représentation générale de dimension β' se décompose en somme directe de deux représentations de dimensions respectives β'_1 et β'_2 , on a alors $\sigma(\beta') = \sigma(\beta'_1) + \sigma(\beta'_2)$.

Remarque 3 : Par contre, même si l'on considère seulement les vecteurs dimension β' qui sont des racines de Schur, on peut tout de même obtenir un ensemble d'inégalités qui n'est pas optimal (dans le sens de "minimal" : certaines inégalités qui apparaissent peuvent être redondantes). Voyons ceci dans l'exemple suivant :

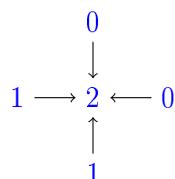
On considère Q le carquois suivant, muni du vecteur dimension β et du poids σ dont les valeurs en x_i et e_{x_i} respectivement sont écrites à côté du sommet x_i concerné, respectivement en bleu et en rouge :



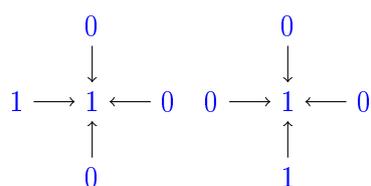
Une représentation générale de dimension β de Q est formée de quatre applications injectives de \mathbb{K} dans \mathbb{K}^2 , dont les images sont des espaces (de dimension 1) deux à deux linéairement indépendants. Les vecteurs dimension des sous-représentations indécomposables de cette représentation générale, notée V , sont alors (on ne représente que la valeur du vecteur dimension sur chaque sommet de Q) :



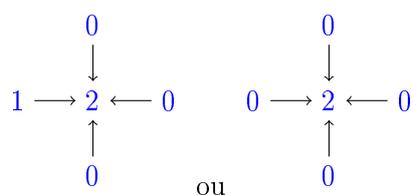
En effet, une représentation générale de vecteur dimension de la forme



n'est pas indécomposable car elle est constituée de deux applications linéaires injectives de \mathbb{K} dans \mathbb{K}^2 dont les images sont deux droites en somme directe dans \mathbb{K}^2 . On peut donc la décomposer en somme directe de deux représentations dont les vecteurs dimension sont :



De même, une représentation générale de vecteur dimension du type



n'est pas indécomposable. Quant aux vecteurs dimension de la forme

$$\begin{array}{ccccc}
 & 1 & & 0 & & 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 1 & \longrightarrow & 1 & \longleftarrow & 1 & \longrightarrow & 1 & \longleftarrow & 1 & \longrightarrow & 1 & \longleftarrow & 0 \\
 & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & & & \uparrow & & & \\
 & 1 & & 1 & & 1 & & & & 1 & & &
 \end{array}
 \quad \text{ou}$$

il n'existe tout simplement pas de sous-représentation de notre représentation générale V qui ait cette dimension. D'où les formes données pour les vecteurs dimension des sous-représentations de V .

Si l'on applique les résultats donnés par le théorème 3, on trouve que $SI(Q, \beta)_\sigma \neq \{0\}$ si et seulement si :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + 2a_5 = 0 \\
 a_2 + a_3 + a_4 + 2a_5 \leq 0 \\
 a_1 + a_3 + a_4 + 2a_5 \leq 0 \\
 a_1 + a_2 + a_4 + 2a_5 \leq 0 \\
 a_1 + a_2 + a_3 + 2a_5 \leq 0 \\
 a_1 + a_5 \leq 0 \\
 a_2 + a_5 \leq 0 \\
 a_3 + a_5 \leq 0 \\
 a_4 + a_5 \leq 0 \\
 a_5 \leq 0
 \end{array} \right.$$

i.e. si et seulement si :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 a_5 = -\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{2} \\
 a_1 \geq 0 \\
 a_2 \geq 0 \\
 a_3 \geq 0 \\
 a_4 \geq 0 \\
 a_1 + a_5 \leq 0 \\
 a_2 + a_5 \leq 0 \\
 a_3 + a_5 \leq 0 \\
 a_4 + a_5 \leq 0 \\
 a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \geq 0
 \end{array} \right.$$

On voit que la dernière inégalité est redondante puisque les quatre premières l'impliquent nécessairement.

3.2 Application à la saturation des coefficients de Littlewood-Richardson

On va, dans ce dernier paragraphe, appliquer le théorème 3 à un carquois particulier. Il s'agit du carquois, noté $T_{n,n,n}$, qui a la forme suivante :

ceux qui proviennent des sommets y , ou z . Mais ils ne signifient rien d'autre : on a $\mathbb{K}_x = \mathbb{K}_y = \mathbb{K}_z = \mathbb{K}$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
\mathbb{K}[\text{Rep}(T_{n,n,n}, \beta)] &\simeq \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \text{Sym}^k \left(\bigoplus_{i=1}^{n-1} (\text{Hom}(\mathbb{K}_x^i, \mathbb{K}_x^{i+1})^* \oplus \text{Hom}(\mathbb{K}_y^i, \mathbb{K}_y^{i+1})^* \oplus \text{Hom}(\mathbb{K}_z^i, \mathbb{K}_z^{i+1})^*) \right) \\
&\simeq \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \bigoplus_{\substack{(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n-1}, (\mu_i)_{1 \leq i \leq n-1}, \\ (\nu_i)_{1 \leq i \leq n-1} / \\ \sum_i (\lambda_i + \mu_i + \nu_i) = k}} \bigotimes_{i=1}^{n-1} (\text{Sym}^{\lambda_i} (\mathbb{K}_x^i \otimes \mathbb{K}_x^{i+1*}) \\
&\quad \otimes \text{Sym}^{\mu_i} (\mathbb{K}_y^i \otimes \mathbb{K}_y^{i+1*}) \otimes \text{Sym}^{\nu_i} (\mathbb{K}_z^i \otimes \mathbb{K}_z^{i+1*})) \\
&\simeq \bigoplus_{\substack{(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n-1}, \\ (\mu_i)_{1 \leq i \leq n-1}, \\ (\nu_i)_{1 \leq i \leq n-1} \in \mathbb{N}^{3(n-1)}}} \bigotimes_{i=1}^{n-1} \left(\bigoplus_{\substack{\alpha_i \\ \text{partitions} \\ \text{de } \lambda_i}} (S_{\alpha_i} \mathbb{K}_x^i \otimes S_{\alpha_i} \mathbb{K}_x^{i+1*}) \right. \\
&\quad \otimes \bigoplus_{\substack{\beta_i \\ \text{partitions} \\ \text{de } \mu_i}} (S_{\beta_i} \mathbb{K}_y^i \otimes S_{\beta_i} \mathbb{K}_y^{i+1*}) \\
&\quad \left. \otimes \bigoplus_{\substack{\gamma_i \\ \text{partitions} \\ \text{de } \nu_i}} (S_{\gamma_i} \mathbb{K}_z^i \otimes S_{\gamma_i} \mathbb{K}_z^{i+1*}) \right) \\
&\simeq \bigoplus_{\substack{(\alpha_i)_{1 \leq i \leq n-1}, (\beta_i)_{1 \leq i \leq n-1}, \\ (\gamma_i)_{1 \leq i \leq n-1} \text{ } (n-1)\text{-uples} \\ \text{de partitions}}} \bigotimes_{i=1}^{n-1} (S_{\alpha_i} \mathbb{K}_x^i \otimes S_{\alpha_i} \mathbb{K}_x^{i+1*} \\
&\quad \otimes S_{\beta_i} \mathbb{K}_y^i \otimes S_{\beta_i} \mathbb{K}_y^{i+1*} \otimes S_{\gamma_i} \mathbb{K}_z^i \otimes S_{\gamma_i} \mathbb{K}_z^{i+1*}).
\end{aligned}$$

Soient $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq n-1}$, $(\beta_i)_{1 \leq i \leq n-1}$, et $(\gamma_i)_{1 \leq i \leq n-1}$ trois $(n-1)$ -uples de partitions. On va

noter

$$H = \prod_{i=1}^{n-1} (\mathrm{SL}(\mathbb{K}_x^i) \times \mathrm{SL}(\mathbb{K}_y^i) \times \mathrm{SL}(\mathbb{K}_z^i)).$$

Par la règle de Littlewood-Richardson [3], le terme de la somme directe précédente qui correspond aux $(n-1)$ -uples $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq n-1}$, $(\beta_i)_{1 \leq i \leq n-1}$, et $(\gamma_i)_{1 \leq i \leq n-1}$ va contenir un H -invariant si et seulement s'il existe $3(n-1)$ entiers positifs ou nuls $\sigma'(e_{x_1}), \dots, \sigma'(e_{x_{n-1}}), \sigma'(e_{y_1}), \dots, \sigma'(e_{y_{n-1}}), \sigma'(e_{z_1}), \dots, \sigma'(e_{z_{n-1}})$ tels que, pour tout $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, les partitions conjuguées respectives de α_i , β_i , et γ_i sont données par :

$$\begin{cases} {}^t\alpha_i = i^{\sigma'(e_{x_i})}, (i-1)^{\sigma'(e_{x_{i-1}})}, \dots, 1^{\sigma'(e_{x_1})} \\ {}^t\beta_i = i^{\sigma'(e_{y_i})}, (i-1)^{\sigma'(e_{y_{i-1}})}, \dots, 1^{\sigma'(e_{y_1})} \\ {}^t\gamma_i = i^{\sigma'(e_{z_i})}, (i-1)^{\sigma'(e_{z_{i-1}})}, \dots, 1^{\sigma'(e_{z_1})} \end{cases}$$

(cela est dû au fait que, si V est un \mathbb{K} -espace vectoriel et λ une partition, alors $(S_\lambda V)^{\mathrm{SL}(V)} \neq \{0\}$ si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\lambda = \underbrace{(k, \dots, k)}_{\dim V \text{ fois}}$). De plus,

l'espace $\mathbb{K}[\mathrm{Rep}(T_{n,n,n}, \beta)]^H$ est alors isomorphe à

$$S_{\alpha_{n-1}} \mathbb{K}^{n^*} \otimes S_{\beta_{n-1}} \mathbb{K}^{n^*} \otimes S_{\gamma_{n-1}} \mathbb{K}^{n^*}$$

(car, si $S_\lambda V \neq \{0\}$, c'est que $S_\lambda V \simeq \Lambda^{\dim V} V \simeq \mathbb{K}$), et ces semi-invariants sont de poids σ' . D'où l'isomorphisme entre $\mathrm{SI}(T_{n,n,n}, \beta)_\sigma$ et l'espace des $\mathrm{SL}(\mathbb{K}^n)$ -invariants de

$$S_\lambda \mathbb{K}^n \otimes S_\mu \mathbb{K}^n \otimes S_\nu \mathbb{K}^n,$$

où λ , μ et ν sont donnés dans l'énoncé de la proposition. \square

A présent que l'on a vu ce lien entre les $\mathrm{SL}(\mathbb{K}^n)$ -invariants de $S_\lambda \mathbb{K}^n \otimes S_\mu \mathbb{K}^n \otimes S_\nu \mathbb{K}^n$ et les sous-espaces à poids, étudiés précédemment, du carquois $T_{n,n,n}$, on va pouvoir appliquer le théorème 3 pour obtenir des conditions sur λ , μ , et ν pour que $(S_\lambda \mathbb{K}^n \otimes S_\mu \mathbb{K}^n \otimes S_\nu \mathbb{K}^n)^{\mathrm{SL}(\mathbb{K}^n)}$ ne soit pas réduit à $\{0\}$.

Corollaire 2. *L'ensemble des triplets de partitions (λ, μ, ν) tels que*

$$(S_\lambda \mathbb{K}^n \otimes S_\mu \mathbb{K}^n \otimes S_\nu \mathbb{K}^n)^{\mathrm{SL}(\mathbb{K}^n)} \neq \{0\}$$

est caractérisé par un nombre fini d'inégalités linéaires homogènes concernant les parts de ces partitions λ , μ et ν , et par la condition que $|\lambda| + |\mu| + |\nu|$ soit divisible par n .

Démonstration. Pour tout $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, on définit $\sigma(e_{x_i})$ (resp. $\sigma(e_{y_i})$ et $\sigma(e_{z_i})$) comme étant le nombre de fois où l'entier i apparaît dans la partition conjuguée de $\lambda : {}^t\lambda$ (resp. ${}^t\mu$ et ${}^t\nu$). On définit de plus $\sigma(e_u)$ de manière à avoir $\sigma(\beta) = 0$ (cela définit $\sigma(e_u)$ de manière unique). De surcroît, comme

$$0 = \sigma(\beta) = n\sigma(e_u) + \sum_{i=1}^{n-1} i(\sigma(e_{x_i}) + \sigma(e_{y_i}) + \sigma(e_{z_i})) = n\sigma(e_u) + |{}^t\lambda| + |{}^t\mu| + |{}^t\nu|$$

(remarque : ${}^t\lambda$ n'est composée que d'entiers inférieurs ou égaux à $n - 1$ car, sinon, on aurait $S_\lambda \mathbb{K}^n = \{0\}$. De même pour μ et ν), σ ainsi défini est un poids (sur $T_{n,n,n}$) si et seulement si $|\lambda| + |\mu| + |\nu|$ est divisible par n .

On a alors, dans ces conditions, par la proposition précédente :

$$(S_\lambda \mathbb{K}^n \otimes S_\mu \mathbb{K}^n \otimes S_\nu \mathbb{K}^n)^{\text{SL}(\mathbb{K}^n)} \simeq \text{SI}(T_{n,n,n}, \beta)_\sigma.$$

Or, par le théorème 3, les poids σ (vérifiant $\sigma(\beta) = 0$) tels que $\text{SI}(T_{n,n,n}, \beta)_\sigma \neq \{0\}$ sont caractérisés par un nombre fini d'inégalités linéaires homogènes. Ces inégalités concernent $\sigma(e_{x_1}), \dots, \sigma(e_{x_{n-1}}), \sigma(e_{y_1}), \dots, \sigma(e_{y_{n-1}}), \sigma(e_{z_1}), \dots, \sigma(e_{z_{n-1}})$ (on peut écrire $\sigma(e_u)$ en fonction de ces autres) et on peut donc, grâce à la manière dont ces entiers sont définis, les réécrire comme des inégalités concernant les parts des partitions λ , μ , et ν . \square

Le lien avec la saturation pour les coefficients de Littlewood-Richardson est alors assez immédiat. En effet, si λ , μ , et ν sont des partitions, le coefficient de Littlewood-Richardson $c'_{\lambda, \mu}$ est égal à la dimension de $(S_\lambda \mathbb{K}^n \otimes S_\mu \mathbb{K}^n \otimes S_\nu \mathbb{K}^n)^{\text{SL}(\mathbb{K}^n)}$, en prenant n qui divise $|\lambda| + |\mu| + |\nu|$. Le fait que $c'_{\lambda, \mu} \neq 0$ (respectivement $c'_{N\lambda, N\mu} \neq 0$, si $N \in \mathbb{N}^*$) se traduit alors en un nombre fini d'inégalités linéaires homogènes en les parts de λ , μ , et ν (respectivement $N\lambda$, $N\mu$, et $N\nu$). On obtient donc la saturation, de la même manière que pour $\Sigma(Q, \beta)$.

Références

- [1] C. De Concini and Claudio Procesi. Characteristic free approach to invariant theory. *Advances in Mathematics*, 21 :330–354, 1976.
- [2] Harm Derksen and Jerzy Weyman. Semi-invariants of quivers and saturation for Littlewood-Richardson coefficients. *Journal of the American Mathematical Society*, 13(3) :467–479, 2000.
- [3] William Fulton and Joe Harris. *Representation Theory*. Springer-Verlag, New-York, 1991.
- [4] A. D. King. Moduli of representation of finite dimensional algebras. *Quarterly Journal of Mathematics, Oxford*, 45 :515–530, 1994.
- [5] Claudio Procesi. *Lie Groups, An approach through invariants and representations*. Springer Science, New-York, 2007.
- [6] Aidan Schofield. Semi-invariants of quivers. *Journal of the London Mathematical Society*, 43(3) :383–395, 1991.
- [7] Aidan Schofield. General representations of quivers. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 65(1) :46–64, 1992.